7章　場合の数と数列

§1　場合の数（p.208〜p.209）

練習問題 1-A

1.　往路について

A $\longrightarrow$ B の行き方は，5 通り

B $\longrightarrow$ C の行き方は，4 通り

復路は，往路と同じ道は通らないので

C $\longrightarrow$ B の行き方は，3 通り

B $\longrightarrow$ A の行き方は，4 通り

よって，積の法則より，$5 \times 4 \times 3 \times 4 = \mathbf{240}$ **通り**

2.　目の出方を (大の目, 小の目) で表す．

ｉ）目の和が 5 のとき

$(1,\ 4), (2,\ 3), (3,\ 2), (4,\ 1)$ の 4 通り

ii）目の和が 10 のとき

$(4,\ 6), (5,\ 5), (6,\ 4)$ の 3 通り

よって，和の法則より，$4 + 3 = \mathbf{7}$ **通り**

3.（1）　最高位（千の位）の数字の選び方は，0 以外の 7 通りあり，残りの 3 つの位については他の 7 つの数字から 4 つをとる順列になるので

$$7 \times {}_7\mathrm{P}_4 = 7 \times 7 \cdot 6 \cdot 5 = \mathbf{1470}\ \textbf{個}$$

（2）　最高位（千の位）の数字の選び方は，0 以外の 7 通りあり，残りの 3 つの位については 8 つの数字の重複順列になるので

$$7 \times 8^3 = \mathbf{3584}\ \textbf{個}$$

4.（1）与式 $= \dfrac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n+1)n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{n+1}}$$

（2）与式 $= \dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}$

$$= \boldsymbol{n(n+1)}$$

（3）　与式

$$= \frac{(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n-r-1)(n-r-2)\cdots 2 \cdot 1}$$

$$= \boldsymbol{(n-r)(n-r+1)}$$

5.　8 個のボールそれぞれについて，入れる箱の選び方は 3 通りずつあるので

$$3^8 = \mathbf{6561}\ \textbf{通り}$$

6.　横方向の線分の中から 2 本，縦方向の線分の中から 2 本を選ぶと 1 つの平行四辺形ができる．

横方向 7 本の中から 2 本の線分の選び方は

$${}_7\mathrm{C}_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \text{ 通り}$$

縦方向 6 本の中から 2 本の線分の選び方は

$${}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ 通り}$$

よって，平行四辺形の個数は，$21 \times 15 = \mathbf{315}$ **個**

7.　$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{3\text{ 個選ぶ}}$

最初に，6 個の位の中から，1 を置く 3 個の位を選ぶと

$${}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ 通り}$$

残りの位は，2 と 3 の 2 つの数字の重複順列であるから，

$$20 \times 2^3 = \mathbf{160}\ \textbf{個}$$

8.（1）3 が 3 個，4 が 2 個，5 が 1 個あるので

$$\frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \mathbf{60}\ \textbf{個}$$

（2）　偶数は，1 の位が 4 のときである．残りの位に並べる数字は，3 が 3 個，4 が 1 個，5 が 1 個であるから

$$\frac{5!}{3!1!1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \mathbf{20}\ \textbf{個}$$

9. この展開式の一般項は

$$\begin{aligned}{}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r &= {}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}(-1)^r x^{6-r} \cdot \frac{1}{x^r} \\ &= {}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}(-1)^r \cdot \frac{x^{6-r}}{x^r} \\ &= {}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r}(-1)^r x^{6-2r}\end{aligned}$$

（1）　$x^{6-2r} = x^4$ となるのは，$6 - 2r = 4$ より，$r = 1$ のときであるから，x^4 の係数は

$${}_6\mathrm{C}_1 2^{6-1}(-1)^1 = 6 \cdot 32 \cdot (-1) = \mathbf{-192}$$

（2）　$x^{6-2r} = \dfrac{1}{x^2}$ となるのは，$6 - 2r = -2$ より，$r = 4$ のときであるから，$\dfrac{1}{x^2}$ の係数は

$${}_6\mathrm{C}_4 2^{6-4}(-1)^4 = 15 \cdot 4 \cdot 1 = \mathbf{60}$$

（3）　定数項は，$6 - 2r = 0$ として，$r = 3$ のときであるから

$${}_6\mathrm{C}_3 2^{6-3}(-1)^3 = 20 \cdot 8 \cdot (-1) = \mathbf{-160}$$

練習問題 1-B

1. （1）8 人の円順列なので

$(8-1)!=7!=$ **5040 通り**

（2）　女子 3 人を 1 組として，男子 5 人と女子 1 組での円順列の数は

$(6-1)!=5!=120$ 通り

この各に対して，女子の並び方は

$3!=6$ 通り

よって，$120\times 6=$ **720 通り**

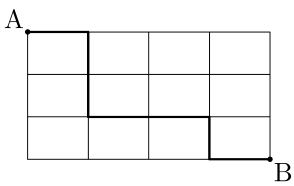
（3）　まず，男子 5 人だけが座ると

$(5-1)!-4!=24$ 通り

の座り方があり，女子 3 人が，5 カ所ある男子の間に順に座っていけばよいので

$24\times {}_5\mathrm{P}_3=24\times 5\cdot 4\cdot 3=$ **1440 通り**

2. （1）　図の最短経路を $-\,|\,|\,-\,-\,|\,-$ と表すことにすると，A から B までの最短経路の数は，縦棒 3 本，横棒 4 本を横 1 列に並べたときの並べ方の総数と一致する．



したがって

$$\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$
$$=\mathbf{35}$$

（2）　A 地点から C 地点までの最短の通路の数は

$$\frac{4!}{2!2!}=6$$

C 地点から B 地点までの最短の通路の数は

$$\frac{3!}{1!2!}=3$$

よって，**C 地点を通る**通路の数は

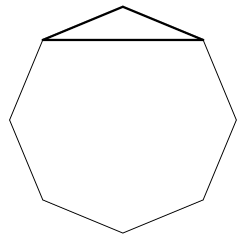
$6\times 3=18$ であるから，C 地点を通らない通路の数は

$35-18=$ **17**

3. （1）　8 個の頂点の中から 3 個を選べば 1 つの三角形ができるので

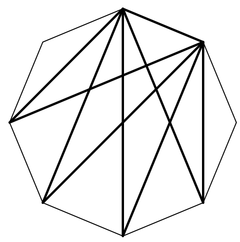
$${}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=\textbf{56 個}$$

（2）　図のように，正八角形と 2 辺を共有する三角形は，1 個の頂点に対して 1 個ずつできるので **8 個**



（3）　図のように，正八角形と 1 辺を共有する三角形は，1 個の辺に対して 4 個ずつできるので

$4\times 8=$ **32 個**



（4）　以上より，正八角形と辺を共有しない三角形の個数は

$56-(8+32)=$ **16 個**

4. （1）　まず，0 が最高位にある場合も含めた数字の列の総数を求めると，1 が 3 個，2 が 2 個，0，3 が 1 個ずつあるので

$$\frac{7!}{3!2!1!1!}=420$$

次に，最高位が 0 のときの数字の列の総数は

$$\frac{6!}{3!2!1!}=60$$

よって，$420-60=$ **360 個**

（2）　1 の位が 0 の場合と 2 の場合に分けて考える．

ｉ）1 の位が 0 のとき

0 以外の 6 個の数字を並べればよいので

$$\frac{6!}{3!2!1!}=60$$

ii）1 の位が 2 のとき

0 が最高位にある場合も含めた数字の列の総数は，0 が 1 個，1 が 3 個，2 が 1 個，3 が 1 個ずつあるので

$$\frac{6!}{1!3!1!1!}=120$$

最高位が 0 のときの数字の列の総数は，1

が 3 個，2 が 1 個，3 が 1 個ずつあるので

$$\frac{5\,!}{3\,!\,1\,!\,1\,!} = 20$$

よって，1 の位が 2 のときの偶数の数は，

$120 - 20 = 100$

以上より，$60 + 100 =$ **160 個**

5. 二項定理を用いて，$(1+x)^n$ を展開すると

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= {}_n\mathrm{C}_0 1^n + {}_n\mathrm{C}_1 1^{n-1}x \\ &\quad + {}_n\mathrm{C}_2 1^{n-2}x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n\end{aligned}$$

ここで，$x = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned}&(1+1)^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 1 + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 1^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 1^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\end{aligned}$$

すなわち

$$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$$

6. ※ 問題集 p.92 の**三項定理**を参照のこと.

$(x^2 + x + 1)^5$ の展開式の一般項は

$$\frac{5\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}(x^2)^p x^q \cdot 1^r = \frac{5\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!} \cdot x^{2p+q}$$

である．ただし，$p + q + r = 5$

（1）$x^9 = x^{2p+q}$ となるのは

$$\begin{cases} 2p + q = 9 & \cdots ① \\ p + q + r = 5 & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つときである.

① − ② より，$p - r = 4$

また，②より，$q = 5 - (p + r)$

$q \geqq 0$ であるから

$5 - (p + r) \geqq 0$

すなわち，$p + r \leqq 5$

よって

$$\begin{cases} p - r = 4 \\ p + r \leqq 5 \end{cases}$$

これを満たす p, r の組を求めると

$(p,\ r) = (4,\ 0)$

したがって

$(p,\ q,\ r) = (4,\ 1,\ 0)$

以上より，x^9 の係数は

$$\frac{5\,!}{4\,!\,1,!\,0\,!} = \mathbf{5}$$

（2）$x^7 = x^{2p+q}$ となるのは

$$\begin{cases} 2p + q = 7 \\ p + q + r = 5 \end{cases}$$

が成り立つときであるから

$$\begin{cases} p - r = 2 \\ p + r \leqq 5 \end{cases}$$

これを満たす p, r の組を求めると

$(p,\ r) = (3,\ 1),\ (2,\ 0)$

したがって

$(p,\ q,\ r) = (3,\ 1,\ 1),\ (2,\ 3,\ 0)$

以上より，x^7 の係数は

$$\frac{5\,!}{3\,!\,1,!\,1\,!} + \frac{5\,!}{2,!\,3,!\,0\,!} = 20 + 10 = \mathbf{30}$$

（3）$x^5 = x^{2p+q}$ となるのは

$$\begin{cases} 2p + q = 5 \\ p + q + r = 5 \end{cases}$$

が成り立つときであるから

$$\begin{cases} p - r = 0 \\ p + r \leqq 5 \end{cases}$$

これを満たす p, r の組を求めると

$(p,\ r) = (2,\ 2),\ (1,\ 1),\ (0,\ 0)$

したがって

$(p,\ q,\ r)$

$= (2,\ 1,\ 2),\ (1,\ 3,\ 1),\ (0,\ 5,\ 0)$

以上より，x^5 の係数は

$$\frac{5\,!}{2\,!\,1,!\,2\,!} + \frac{5\,!}{1,!\,3,!\,1\,!} + \frac{5\,!}{0,!\,5,!\,0\,!}$$

$= 30 + 20 + 1 = \mathbf{51}$