7章　場合の数と数列

§1　場合の数 (p.194〜p.206)

問 1

300 を素因数分解すると，

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

各素因数の指数はそれぞれ 2，1，2 であるから，約数の個数は，

$(2+1)(1+1)(2+1) = 3 \cdot 2 \cdot 3 =$ **18 個**

問 2

（1）　各因数の指数はそれぞれ 4，2，5 であるから，約数の個数は，

$(4+1)(2+1)(5+1) = 5 \cdot 3 \cdot 6 =$ **90 個**

（2）　$x^4 - x^2 = x^2(x+1)(x-1)$

各因数の指数はそれぞれ 3，1，1 であるから，約数の個数は，

$(2+1)(1+1)(1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 =$ **12 個**

問 3

$3x + y \leqq 12$ より，$y \leqq 12 - 3x$

i）$x = 1$ のとき

$1 \leqq y \leqq 9$ であるから，9 個

ii）$x = 2$ のとき

$1 \leqq y \leqq 6$ であるから，6 個

iii）$x = 3$ のとき

$1 \leqq y \leqq 3$ であるから，3 個

和の法則より，求める個数は，$9 + 6 + 3 =$ **18 個**

問 4

$2x + y + z = 8$ より，$y + z = 8 - 2x$

i）$x = 1$ のとき

$y + z = 6$ であるから，これを満たす正の整数の組 (y, z) は

(1，5),(2，4),(3，3),(4，2),(4，2) の 5 個

ii）$x = 2$ のとき

$y + z = 4$ であるから，これを満たす正の整数の組 (y, z) は

(1，3),(2，2),(3，1) の 3 個

iii）$x = 3$ のとき

$y + z = 2$ であるから，これを満たす正の整数の組 (y, z) は

(1，1) の 1 個

和の法則より，求める個数は，$5 + 3 + 1 =$ **9 個**

問 5

目の出方を（大の目，中の目，小の目）で表す．

i）大の目が 2 の場合

(2，1，1)　の 1 通り

ii）大の目が 3 になる場合

(3，1，2),(3，2，1) の 2 通り

iii）大の目が 4 になる場合

(4，1，3),(4，3，1),(4，2，2) の 3 通り

iv）大の目が 5 になる場合

(5，1，4),(5，4，1),(5，2，3),
(5，3，2) の 4 通り

v）大の目が 6 になる場合

(6，1，5),(6，5，1),(6，2，4),
(6，4，2),(6，3，3) の 5 通り

和の法則より，求める個数は，

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 =$ **15 通り**

問 6

（1）与式 $= 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{120}$

（2）与式 $= \mathbf{5}$

（3）与式 $= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{840}$

（4）与式 $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{720}$

問 7

（1）与式 $= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{24}$

（2）与式 $= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{5040}$

（3）与式 $= \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

$= 9 \cdot 8 = \mathbf{72}$

（4）与式 $= \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \boldsymbol{n}$

問 8

2 つの母音 a，e を両端に並べるときの並べ方は，2! 通り

その各の並べ方に対して，母音の間に並べる残りの 3 文字の並べ方は，3! 通り

よって，積の法則より，並べ方の数は，

$2! \times 3! = 2 \cdot 6 =$ **12 個**

問 9

（1）　7 つの部屋から 3 つを選び，A，B，C の順に宿泊する部屋を決めればよいので，

$_7\mathrm{P}_3 = 7\cdot6\cdot5 = \mathbf{210}$ **通り**

（2）　連続する番号となるような部屋の選び方は，

1-2-3，2-3-4，3-4-5，4-5-6，5-6-7

の 5 通りあり，その各の部屋の選び方に対して，3 人の部屋の選び方は，3! 通り

よって，積の法則より，$5\times3! = \mathbf{30}$ **通り**

問 10

1 つのさいころの目の出方は 6 通りあるから，

$6^4 = \mathbf{1296}$ **通り**

問 11

1 人の手の出し方は 3 通りあるから，

$3^3 = \mathbf{27}$ **通り**

問 12

1 つの場所に置く数字は 0，1 の 2 通りあるから，

$2^8 = \mathbf{256}$ **通り**

問 13

（1）　与式 $= \dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{20}$

（2）　与式 $= \dfrac{10\cdot9}{2\cdot1} = \mathbf{45}$

（3）　与式 $= {}_7\mathrm{C}_2 = \dfrac{7\cdot6}{2\cdot1} = \mathbf{21}$

（4）　与式 $= {}_n\mathrm{C}_0 = \mathbf{1}$

問 14

左辺 $= \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

右辺 $= \dfrac{n!}{\{n-(n-r)\}!\,(n-r)!}$

$= \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

よって，左辺 = 右辺

問 15

男子 12 人の中から 3 人を選ぶ方法は，

${}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$ 通り

女子 8 人の中から 2 人を選ぶ方法は，

${}_8\mathrm{C}_2 = 28$ 通り

よって，積の法則より，$220\times28 = \mathbf{6160}$ **通り**

問 16

6 個の点の中から 2 個を選べば 1 つの線分ができるので，線分の数は

${}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot5}{2\cdot1} = \mathbf{15}$ **本**

6 個の点の中から 3 個を選べば 1 つの三角形ができるので，三角形の数は

${}_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{20}$ **個**

問 17

（1）　左辺 $= {}_9\mathrm{C}_4 + {}_9\mathrm{C}_3$

$= {}_8\mathrm{C}_4 + {}_8\mathrm{C}_3 + {}_8\mathrm{C}_3 + {}_8\mathrm{C}_2$

$= {}_8\mathrm{C}_4 + 2{}_8\mathrm{C}_3 + {}_8\mathrm{C}_2 =$ 右辺

（2）　（1）より，

左辺 $= {}_8\mathrm{C}_4 + 2{}_8\mathrm{C}_3 + {}_8\mathrm{C}_2$

$= {}_7\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_3 + 2({}_7\mathrm{C}_3 + {}_7\mathrm{C}_2) + {}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_1$

$= {}_7\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_3 + 2{}_7\mathrm{C}_3 + 2{}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_1$

$= {}_7\mathrm{C}_4 + +3{}_7\mathrm{C}_3 + 3{}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_1 =$ 右辺

問 18

1 が 4 個，2 が 2 個，3 が 2 個あるから，求める整数の個数は，

$\dfrac{8!}{4!2!2!} = \mathbf{420}$ **個**

問 19

同じものが，3 個，2 個，2 個ずつあるので，求める並べ方の個数は，

$\dfrac{7!}{3!2!2!} = \mathbf{210}$ **通り**

白玉 2 個を 1 組とすると，赤玉 3 個，青玉 2 個，白玉 1 組の並べ方の個数は，

$\dfrac{6!}{3!2!1!} = \mathbf{60}$ **通り**

問 20

（1）　4 人の円順列なので

$(4-1)!=3!=\mathbf{6}$ **通り**

（2）　（1）の男子の各の並び方に対して，4 人の女子が 4 カ所ある男子の間に並んでいけばよいので

$6\times 4!=6\cdot 24=\mathbf{144}$ **通り**

問 21

（1）与式 $= {}_7\mathrm{C}_0\ a^7+{}_7\mathrm{C}_1\ a^6\cdot 1^1+{}_7\mathrm{C}_2\ a^5\cdot 1^2$

$+{}_7\mathrm{C}_3\ a^4\cdot 1^3+{}_7\mathrm{C}_4\ a^3\cdot 1^4+{}_7\mathrm{C}_5\ a^2\cdot 1^5$

$+{}_7\mathrm{C}_6\ a^1\cdot 1^6+{}_7\mathrm{C}_7\ 1^7$

$=\boldsymbol{a^7+7a^6+21a^5+35a^4}$

$\boldsymbol{+35a^3+21a^2+7a+1}$

（2）与式 $= {}_4\mathrm{C}_0\ a^4+{}_4\mathrm{C}_1\ a^3(2b)^1+{}_4\mathrm{C}_2\ a^2(2b)^2$

$+{}_4\mathrm{C}_3\ a^1(2b)^3+{}_4\mathrm{C}_4\ (2b)^4$

$=\boldsymbol{a^4+8a^3b+24a^2b^2+32ab^3+16b^4}$

（3）与式 $= {}_6\mathrm{C}_0\ x^6+{}_6\mathrm{C}_1\ x^5(-1)+{}_6\mathrm{C}_2\ x^4(-1)^2$

$+{}_6\mathrm{C}_3\ x^3(-1)^3+{}_6\mathrm{C}_4\ x^2(-1)^4$

$+{}_6\mathrm{C}_5\ x\cdot(-1)^5+{}_6\mathrm{C}_6\ (-1)^6$

$=\boldsymbol{x^6-6x^5+15x^4}$

$\boldsymbol{-20x^3+15x^2-6x+1}$

問 22

この展開式の一般項は，

$${}_8\mathrm{C}_r\left(\frac{x}{2}\right)^{8-r}(-6y)^r$$

$$={}_8\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^{8-r}(-6)^r x^{8-r}y^r$$

$x^{8-r}y^r=x^5y^3$ となるのは，$r=3$ のときであるから，求める係数は

$${}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^{8-3}(-6)^3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{1}{2}\right)^5(-6)^3$$

$$=\boldsymbol{-378}$$

∎