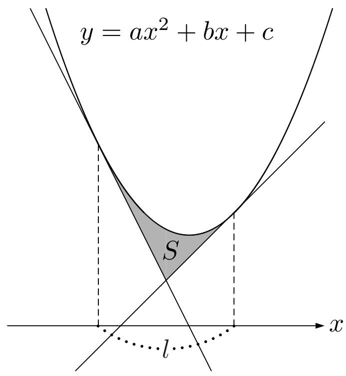
面積の $\dfrac{1}{12}$ 公式［1］

放物線 $y=ax^2+bx+c$ と，この放物線の 2 本の接線で囲まれる部分の面積を S とする。

図のように，2 つの接点の x 座標の差を l とすると

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{12}|a|\,l^3}$$



証明

2 つの接点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。

$y=ax^2+bx+c$ を微分すると

$y'=2ax+b$

よって，2 つの接線の方程式は

$y-(a\alpha^2+b\alpha+c)=(2a\alpha+b)(x-\alpha)$

$y-(a\beta^2+b\beta+c)=(2a\beta+b)(x-\beta)$

整理すると

$y=(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c$

$y=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$

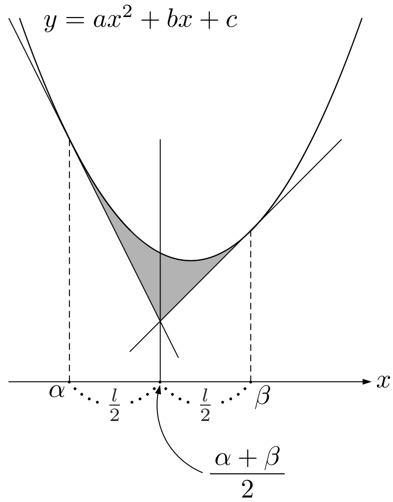
2 直線の交点の x 座標を求めると

$(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$

$2a(\alpha-\beta)x=a(\alpha^2-\beta^2)$

$a\fallingdotseq 0$，$\alpha\fallingdotseq\beta$ なので

$x=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2(\alpha-\beta)}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$



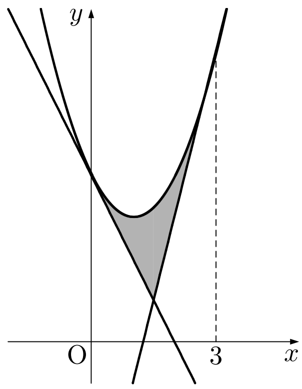
よって，$\beta-\alpha=l$ とすれば，図のように交点の x 座標と 2 つの接点までの x 座標の差はいずれも $\dfrac{l}{2}$ となる。

ここで，直線 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ の両側で，面積の $\dfrac{1}{3}$ 公式を利用すると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{3}|a|\left(\frac{l}{2}\right)^3\times 2\\&=\frac{2}{3}|a|\cdot\frac{l^3}{8}\\&=\frac{1}{12}|a|\,l^3 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{例題}}$　次の問いに答えなさい。

（1）　放物線 $y = x^2 - 2x + 4$ と，この放物線上の点 $(0,\ 3)$，$(3,\ 7)$ における接線で囲まれた図形の面積を求めなさい。



〔解答〕

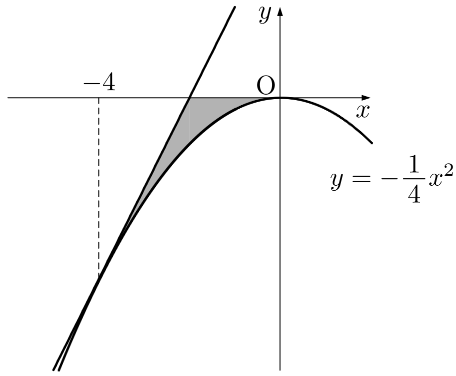
2 つの接点の x 座標の差は

$l = 3 - 0 = 3$

よって

$$S = \frac{1}{12} \cdot |1| \cdot 3^3 = \boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

（2）　放物線 $y = -\dfrac{1}{4}x^2$ と，この放物線上の点 $(-4, -4)$ における接線，および x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。



〔解答〕

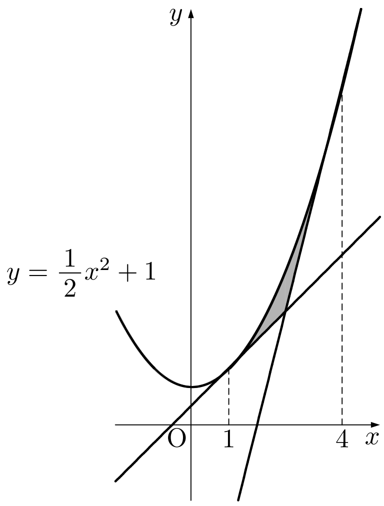
放物線は原点で x 軸に接するので

$l = 0 - (-4) = 4$

よって

$$S = \frac{1}{12} \cdot \left| -\frac{1}{4} \right| \cdot 4^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

（3）　放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$ と，この放物線の，傾きが 1，および 4 である 2 本の接線で囲まれた図形の面積を求めなさい。



〔解答〕

$y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$ を微分すると，$y' = x$

よって，傾きが 1 である接線と放物線の接点の x 座標は，$y' = x = 1$ より，$x = 1$

同様に，傾きが 4 である接線と放物線の接点の x 座標は，$y' = x = 4$ より，$x = 4$

$l = 4 - 1 = 3$

よって

$$S = \frac{1}{12} \cdot \left| \frac{1}{2} \right| \cdot 3^3 = \boldsymbol{\frac{9}{8}}$$