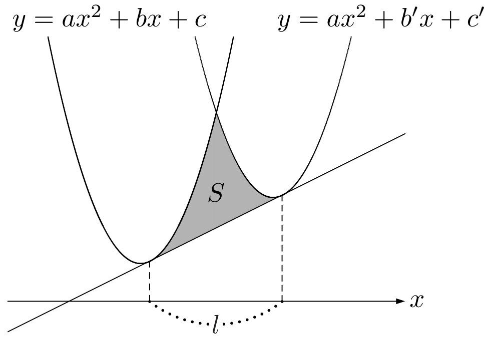
面積の $\dfrac{1}{12}$ 公式 [2]

軸の異なる 2 つの合同な放物線 $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^2 + b'x + c'$ と，この 2 つの放物線の共通接線で囲まれる部分の面積を S とする。

図のように，それぞれの放物線と共通接線の接点の x 座標の差を l とすると

$$S = \frac{1}{12}|a|\,l^3$$



証明

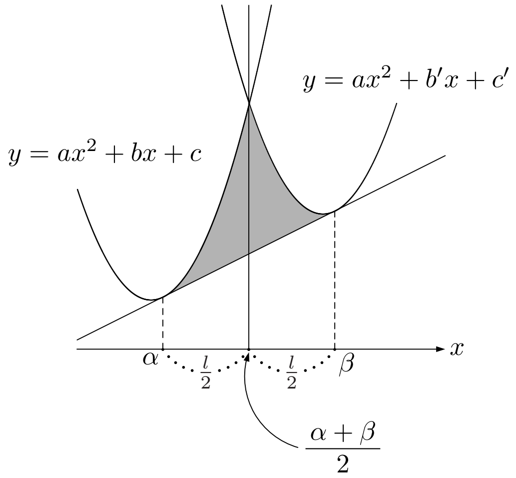
2 つの放物線の交点の x 座標を求める。

$ax^2 + bx + c = ax^2 + b'x + c'$

$(b - b')x = c' - c$

軸が異なるので，$b \neq b'$

よって，$x = -\dfrac{c - c'}{b - b'} \cdots ①$



それぞれの放物線と共通接線との接点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ \ (\alpha < \beta)$ とする。

$y = ax^2 + bx + c$ を微分すると

$y' = 2ax + b$

よって，点 $(\alpha,\ a\alpha^2 + b\alpha + c)$ における放物線の接線の方程式は

$y - (a\alpha^2 + b\alpha + c) = (2a\alpha + b)(x - \alpha)$

整理すると

$y = (2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c \cdots ②$

$y = ax^2 + b'x + c'$ を微分すると

$y' = 2ax + b'$

よって，点 $(\beta,\ a\beta^2 + b'\beta + c')$ における放物線の接線の方程式は

$y - (a\beta^2 + b'\beta + c') = (2a\beta + b')(x - \beta)$

整理すると

$y = (2a\beta + b')x - a\beta^2 + c' \cdots ③$

②と③は一致するので

$$\begin{cases} 2a\alpha + b = 2a\beta + b' & \cdots ④ \\ -a\alpha^2 + c = -a\beta^2 + c' & \cdots ⑤ \end{cases}$$

④より，$b - b' = 2a(\beta - \alpha) \cdots ④'$

⑤より，$c - c' = -a(\beta^2 - \alpha^2) \cdots ⑤'$

$④', ⑤'$ を①に代入すると，交点の x 座標は

$$x = -\frac{-a(\beta^2 - \alpha^2)}{2a(\beta - \alpha)} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

よって，$\beta-\alpha=l$ とすれば，図のように交点の x 座標と 2 つの接点までの x 座標の差はいずれも $\dfrac{l}{2}$ となる。

ここで，直線 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ の両側で，面積の $\dfrac{1}{3}$ 公式を利用すると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{3}|a|\left(\frac{l}{2}\right)^3\times 2\\&=\frac{2}{3}|a|\cdot\frac{l^3}{8}\\&=\frac{1}{12}|a|l^3 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

※　l について

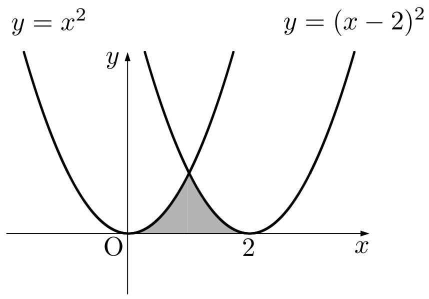
2 つの放物線の軸の方程式はそれぞれ，$x=-\dfrac{b}{2a}$，$x=-\dfrac{b'}{2a}$，また，④$'$ より，$b-b'=2a(\beta-\alpha)$ であるから

$$\begin{aligned}-\frac{b'}{2a}-\left(-\frac{b}{2a}\right)&=\frac{b-b'}{2a}\\&=\frac{2a(\beta-\alpha)}{2a}\\&=\beta-\alpha\end{aligned}$$

よって，2 つの接点の x 座標の差 l は，2 つの放物線の頂点の x 座標の差と等しい。

例題　次の問いに答えなさい。

（1）　2 つの放物線 $y=x^2$，$y=(x-2)^2$ と，x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。



〔解答〕

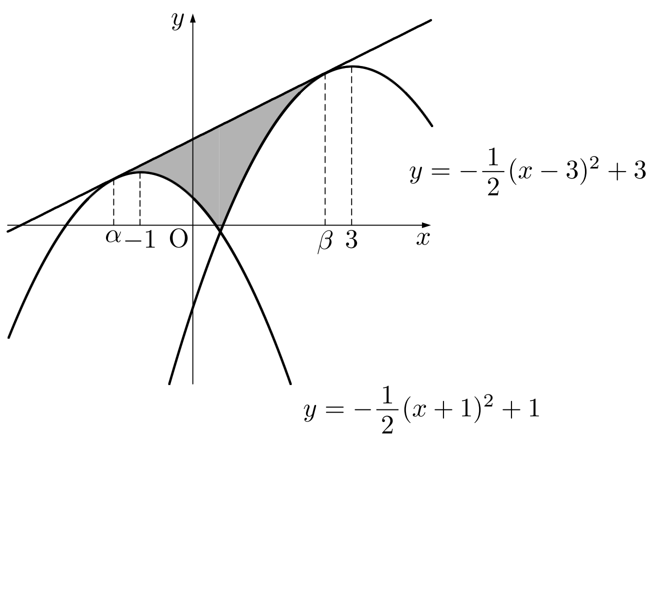
2 つの放物線は，それぞれ原点，(2, 0) で x 軸に接しているので，2 つの接点の x 座標の差は

$l=2-0=2$

よって

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{12}\cdot|1|\cdot 2^3\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

（2）　2 つの放物線 $y=-\dfrac{1}{2}(x+1)^2+1$，$y=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+3$ と，2 つの放物線の共通接線で囲まれた図形の面積を求めなさい。



〔解答〕

2 つの接点の x 座標の差は，放物線の頂点の x 座標の差に等しいので

$l=3-(-1)=4$

よって

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{12}\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|\cdot 4^3\\&=\boldsymbol{\frac{8}{3}}\end{aligned}$$