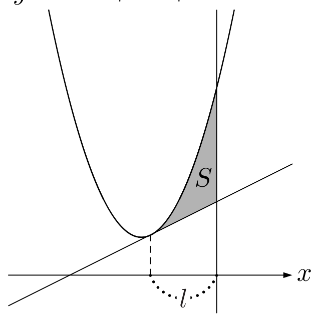
面積の $\dfrac{1}{3}$ 公式

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と，この放物線の接線，及び y 軸に平行な直線で囲まれる部分の面積を S とする。

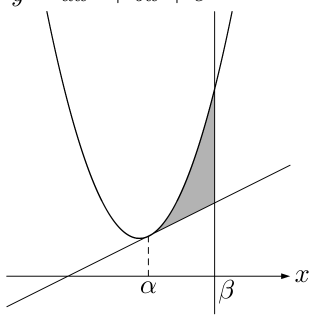
図のように，接点の x 座標と，y 軸に平行な直線と x 軸との交点の x 座標の差を l とすると

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{3}|\,a\,|\,l^3}$$



証明

放物線と接線の接点の x 座標を α, y 軸に平行な直線の式を，$x = \beta$ とする。　($\alpha < \beta$ の場合のみ証明)



$y = ax^2 + bx + c$ を微分すると

$$y' = 2ax + b$$

よって，点 $(\alpha,\ a\alpha^2 + b\alpha + c)$ における放物線の接線の方程式は

$$y - (a\alpha^2 + b\alpha + c) = (2a\alpha + b)(x - \alpha)$$

整理すると

$$y = (2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c$$

i) $a > 0$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left[(ax^2 + bx + c) - \{(2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c\}\right] dx \\ &= \int_\alpha^\beta (ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2)\, dx = a\int_\alpha^\beta (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)\, dx \\ &= a\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^2\, dx = a\left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{3}a(\beta - \alpha)^3 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

ii) $a < 0$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left[\{(2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c\} - (ax^2 + bx + c)\right] dx \\ &= \int_\alpha^\beta (-ax^2 + 2a\alpha x - a\alpha^2)\, dx = -a\int_\alpha^\beta (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)\, dx \\ &= -a\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^2\, dx = -a\left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3\right]_\alpha^\beta = -\frac{1}{3}a(\beta - \alpha)^3 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

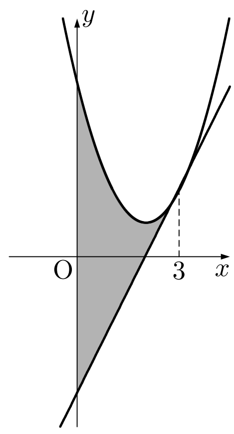
①，②より，$S = \begin{cases} \dfrac{1}{3}a(\beta - \alpha)^3 & (a > 0 \text{ のとき}) \\ -\dfrac{1}{3}a(\beta - \alpha)^3 & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

これをまとめて，$S = \dfrac{1}{3}|\,a\,|(\beta - \alpha)^3$

$\beta - \alpha = l$ とすれば，$S = \dfrac{1}{3}|\,a\,|\,l^3$ ∎

例題　次の問いに答えなさい。

（1）　放物線 $y=x^2-4x+5$ と，この放物線上の点 $(3,\ 2)$ における接線，および y 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。



〔解答〕

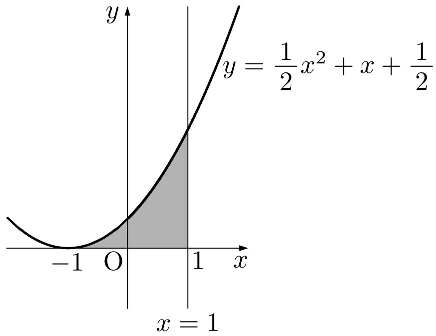
y 軸は，直線 $x=0$ であるから

$l=3-0=3$

よって

$$S=\frac{1}{3}\cdot|1|\cdot 3^3$$
$$=\mathbf{9}$$

（2）　放物線 $y=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$ と直線 $x=1$，および x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。



〔解答〕

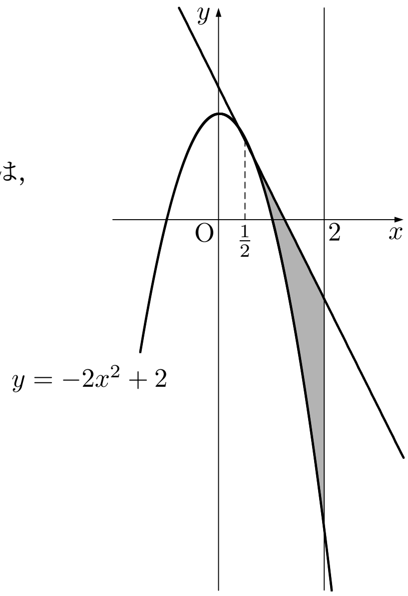
放物線の式は，$y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ と変形できるので，放物線は点 $(-1,\ 0)$ で x 軸に接している。

$l=1-(-1)=2$

よって

$$S=\frac{1}{3}\cdot\left|\frac{1}{2}\right|\cdot 2^3$$
$$=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

（3）　放物線 $y=-2x^2+2$ と，この放物線に接する傾きが -2 の直線，および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。



〔解答〕

$y=-2x^2+2$ を微分すると，$y'=-4x$

よって，傾きが -2 である接線と放物線の接点の x 座標は，$y'=-4x=-2$ より，$x=\frac{1}{2}$

$l=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

よって

$$S=\frac{1}{3}\cdot|-2|\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3$$
$$=\mathbf{\frac{9}{4}}$$