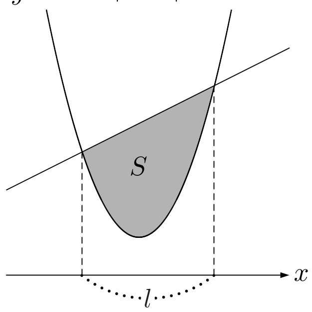
面積の $\dfrac{1}{6}$ 公式

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と，この放物線と 2 点で交わる直線で囲まれる部分の面積を S とする。

図のように，2 つの交点の x 座標の差を l とすると

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{6}|\,a\,|\,l^3}$$

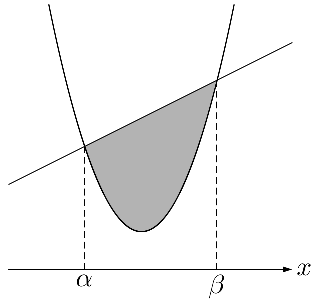


証明

2 つの交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ \ (\alpha < \beta)$ とする。

2 点 $(\alpha,\ a\alpha^2 + b\alpha + c)$，$(\beta,\ a\beta^2 + b\beta + c)$ を通る直線の方程式は

$$y - (a\alpha^2 + b\alpha + c) = \frac{(a\beta^2 + b\beta + c) - (a\alpha^2 + b\alpha + c)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$$



整理すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{a(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + (a\alpha^2 + b\alpha + c) \\ &= \{a(\beta + \alpha) + b\}(x - \alpha) + (a\alpha^2 + b\alpha + c) \\ &= \{a(\alpha + \beta) + b\}x - a\alpha\beta + c \end{aligned}$$

i) $a > 0$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left[\{a(\alpha + \beta) + b\}x - a\alpha\beta + c - (ax^2 + bx + c)\right] dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{-ax^2 + a(\alpha + \beta)x - a\alpha\beta\}\, dx = -a\int_\alpha^\beta \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}\, dx \\ &= -a\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\, dx = -a\left\{-\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3\right\} \qquad \left(\text{定積分の}\frac{1}{6}\text{公式より}\right) \\ &= \frac{1}{6}a(\beta - \alpha)^3 \quad \cdots① \end{aligned}$$

ii) $a < 0$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left[(ax^2 + bx + c) - (\{a(\alpha + \beta) + b\}x - a\alpha\beta + c)\right] dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta\}\, dx = a\int_\alpha^\beta \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}\, dx \\ &= a\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\, dx = a\left\{-\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3\right\} \qquad \left(\text{定積分の}\frac{1}{6}\text{公式より}\right) \\ &= -\frac{1}{6}a(\beta - \alpha)^3 \quad \cdots② \end{aligned}$$

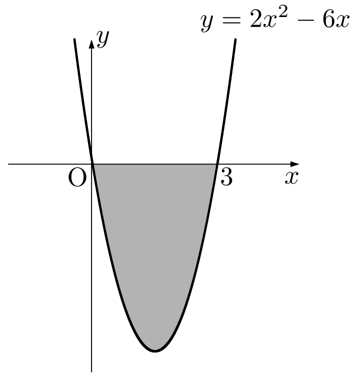
①，②より，$S = \begin{cases} \dfrac{1}{6}a(\beta - \alpha)^3 & (a > 0 \text{ のとき}) \\ -\dfrac{1}{6}a(\beta - \alpha)^3 & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

これをまとめて，$S = \dfrac{1}{6}|\,a\,|(\beta - \alpha)^3$

$\beta - \alpha = l$ とすれば，$S = \dfrac{1}{6}|\,a\,|\,l^3$ ∎

例題 次の問いに答えなさい。

（1） 放物線 $y=2x^2-6x$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。



〔解答〕

放物線と x 軸との交点の x 座標を求めると

$2x^2-6x=0$

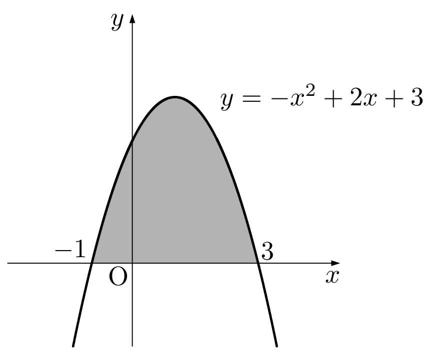
$x(x-3)=0$

$x=0,\ 3$ であるから，$l=3-0=3$

よって

$$S=\frac{1}{6}\cdot|2|\cdot 3^3$$
$$=\mathbf{9}$$

（2） 放物線 $y=-x^2+2x+3$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。



〔解答〕

放物線と x 軸との交点の x 座標を求めると

$-x^2+2x+3=0$

$x^2-2x-3=0$

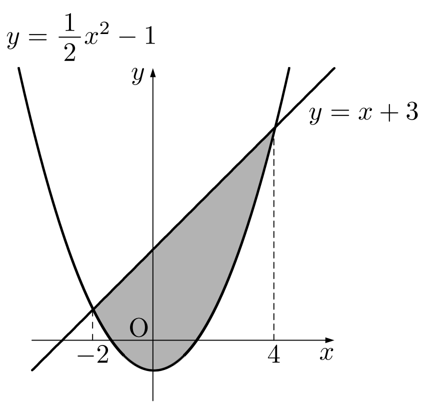
$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1,\ 3$ であるから，$l=3-(-1)=4$

よって

$$S=\frac{1}{6}\cdot|-1|\cdot 4^3$$
$$=\boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

（3） 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-1$ と直線 $y=x+3$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。



〔解答〕

放物線と直線の交点の x 座標を求めると

$\frac{1}{2}x^2-1=x+3$

$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$x=-2,\ 4$ であるから，$l=4-(-2)=6$

よって

$$S=\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{1}{2}\right|\cdot 6^3$$
$$=\mathbf{18}$$