1章　ベクトル

§1　平面のベクトル　(p.3〜p.8)

BASIC

1　正六角形の性質より，内部の三角形はすべて正三角形であるから

$\mathrm{OA}=\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=\mathrm{ED}=1$

$\mathrm{AD}=\mathrm{FC}=2$

よって

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\mathbf{1},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\mathbf{1},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|=\mathbf{1},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{ED}}\right|=\mathbf{1}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\mathbf{2},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{FC}}\right|=\mathbf{2}$

大きさと向きが同じベクトルが等しいベクトルであるから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$

大きさが1のベクトルが単位ベクトルであるから

$\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{CD}},\ \overrightarrow{\mathrm{ED}}$

2　大きさが同じで向きが反対であるものが，互いに逆ベクトルとなるので

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$

3（1）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{PA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}+\overrightarrow{\mathrm{A_3Q}}\\&=\vec{d}+(-\vec{b})+(-\vec{c})+\vec{a}\\&=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{PA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}+\overrightarrow{\mathrm{A_3Q}}\\&=\vec{b}+(-\vec{d})+(-\vec{c})+\vec{a}\\&=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}}\end{aligned}$$

4（1）与式 $=-3\vec{a}+12\vec{b}+4\vec{a}-10\vec{b}$

$=\boldsymbol{\vec{a}+2\vec{b}}$

（2）与式 $=2\vec{a}+8\vec{b}+\vec{a}-3\vec{b}$

$=\boldsymbol{3\vec{a}+5\vec{b}}$

5

$$\begin{aligned}2\vec{a}+\vec{b}-\vec{x}&=-3\vec{x}-\vec{a}+3\vec{b}\\-\vec{x}+3\vec{x}&=-\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{a}-\vec{b}\\2\vec{x}&=-3\vec{a}+2\vec{b}\\\boldsymbol{\vec{x}}&=\boldsymbol{-\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}}\end{aligned}$$

6　$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが1のベクトルは，$\dfrac{\vec{a}}{5}$ であり，求めるベクトルはこのベクトルの逆ベクトルであるから，$\boldsymbol{-\dfrac{\vec{a}}{5}}$

7（1）

$$\begin{aligned}\text{与式}&=2(-2,\ 3)-(1,\ -1)\\&=(-4,\ 6)-(1,\ -1)\\&=(-4-1,\ 6-(-1))\\&=(-5,\ 7)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|&=\sqrt{(-5)^2+7^2}\\&=\sqrt{25+49}=\boldsymbol{\sqrt{74}}\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\frac{1}{2}(-2,\ 3)+(1,\ -1)\\&=\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)+(1,\ -1)\\&=\left(-1+1,\ \frac{3}{2}-1\right)\\&=\left(0,\ \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right|&=\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}\text{与式}&=-\frac{1}{2}(-2,\ 3)+\frac{1}{3}(1,\ -1)\\&=\left(1,\ -\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{3},\ -\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\\&=\left(\frac{4}{3},\ -\frac{11}{6}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\left|-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right|&=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{11}{6}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{121}{36}}\\&=\sqrt{\frac{64+121}{36}}\\&=\sqrt{\frac{185}{36}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{185}}{6}}\end{aligned}$$

8（1）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(3,\ 1)-(1,\ -1)\\&=(3-1,\ 1-(-1))\\&=(2,\ 2)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|&=\sqrt{2^2+2^2}\\&=\sqrt{8}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=(-1,\ 2)-(3,\ 1)\\&=(-1-3,\ 2-1)\\&=(-4,\ 1)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|&=\sqrt{(-4)^2+1^2}\\&=\boldsymbol{\sqrt{17}}\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CA}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(1,\ -1)-(-1,\ 2)\\&=(1-(-1),\ -1-2)\\&=(2,\ -3)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|&=\sqrt{2^2+(-3)^2}\\&=\boldsymbol{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(2,\ -1)-(-1,\ 0)\\&=(2-(-1),\ -1-0)=(3,\ -1)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x,\ y)-(-1,\ 0)$

$\quad=(x+1,\ y)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$(x+1,\ y)=k(3,\ -1)$

$\quad=(3k,\ -k)$

これより，$\begin{cases} x+1=3k & \cdots ① \\ y=-k & \cdots ② \end{cases}$

また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=20$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=400$

すなわち，$(x+1)^2+y^2=400 \quad \cdots ③$

①, ② を ③ に代入して

$(3k)^2+(-k)^2=400$

$10k^2=400$

$k^2=40$

k は正の実数なので，$k=\sqrt{40}=\boldsymbol{2\sqrt{10}}$

これを，①, ② に代入して

$x=-1+3\cdot 2\sqrt{10}=-1+6\sqrt{10}$

$y=-2\sqrt{10}$

よって，点 C の座標は，$\boldsymbol{(-1+6\sqrt{10},\ -2\sqrt{10})}$

10　（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot 2\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}$

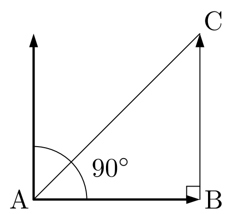
$\quad=2\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{4\sqrt{3}}$

（2）$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\dfrac{3}{4}\pi$

$\quad=2\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boldsymbol{-\sqrt{6}}$

11　三平方の定理より，$\mathrm{AC}=2\sqrt{2}$

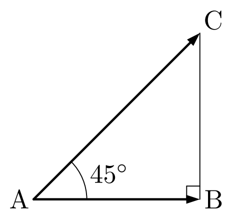
（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角は 90° である．



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\cdot 2\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}$

$\quad=4\cdot 0=\boldsymbol{0}$

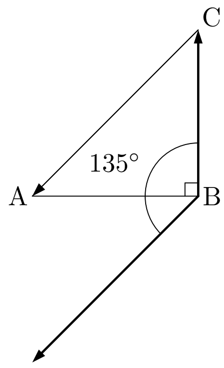
（2）　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角は 45° である．



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}$

$\quad=4\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{4}$

（3）　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ のなす角は 135° である．



$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos\dfrac{3}{4}\pi$

$\quad=4\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{-4}$

12　（1）　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)$

$\quad=-2+3=\boldsymbol{1}$

（2）　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}+(-5)\cdot\sqrt{2}$

$\quad=5\sqrt{2}-5\sqrt{2}=\boldsymbol{0}$

13　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする．

（1）　$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+3^2}$

$\quad=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+2^2}$

$\quad=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 4+3\cdot 2$

$\quad=4+6=10$

したがって

$\cos\theta=\dfrac{10}{\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{5}}$

$\quad=\dfrac{10}{10\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}}$

（2）　$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+2^2}$

$\quad=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+(-3)^2}$

$\quad=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1+2\cdot(-3)$

$\quad=1-6=-5$

したがって

$\cos\theta=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}$

$\quad=-\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{3}{4}\pi}$

（3）　$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+3^2}$

$\quad=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}$

$\quad=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-2)+3\cdot(-3)$

$\quad=-4-9=-13$

したがって

$$\cos\theta = \frac{-13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}$$
$$= -\frac{13}{13} = -1$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\boldsymbol{\theta = \pi}$

（4）　$|\vec{a}| = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + 2^2}$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{3}+3+4} = \sqrt{8+2\sqrt{3}}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{1-2\sqrt{3}+3+1} = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) + 2\cdot 1$$
$$= 1-3+2 = 0$$

したがって

$$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{3}}} = 0$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$

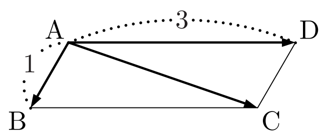
14（1）　与式 $= 2\vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b}$

$$= 2|\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{b}|^2$$
$$= 2\cdot(\sqrt{3})^2 + 1 - (\sqrt{5})^2$$
$$= 6+1-5 = \mathbf{2}$$

（2）　与式 $= (2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$

$$= 2\vec{a}\cdot 2\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot 2\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$
$$= 4\cdot(\sqrt{3})^2 + 4\cdot 1 + (\sqrt{5})^2$$
$$= 12+4+5 = \mathbf{21}$$

15



$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1,\ |\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = 3$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 1\cdot 3\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$= 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$$
$$= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} + |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$$
$$= 1^2 + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + 3^2$$
$$= 1-3+9 = 7$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| > 0$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \boldsymbol{\sqrt{7}}$

16（1）　ベクトルの平行条件より，$\vec{b} = m\vec{a}$ となる実数 m が存在するから

$$(-3,\ k+5) = m(2,\ k)$$

これより，$\begin{cases} -3 = -2m & \cdots ① \\ k+5 = mk & \cdots ② \end{cases}$

① より，$m = -\frac{3}{2}$

これを ② に代入して

$$k+5 = -\frac{3}{2}k$$
$$2(k+5) = -3k$$
$$2k+10 = -3k$$
$$5k = -10$$

よって，$\boldsymbol{k = -2}$

（2）　ベクトルの平行条件より，$\vec{b} = m\vec{a}$ となる実数 m が存在するから

$$(k,\ k+4) = m(1,\ 3)$$

これより，$\begin{cases} k = m & \cdots ① \\ k+4 = 3m & \cdots ② \end{cases}$

① を ② に代入して

$$k+4 = 3k$$
$$2k = 4$$

よって，$\boldsymbol{k = 2}$　$(m = 2)$

17　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (6,\ -7) - (2,\ 3)$

$$= (4,\ -10)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (k,\ 2) - (-1,\ k)$$
$$= (k+1,\ 2-k)$$

ベクトルの平行条件より，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = m\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 m が存在するから

$$(k+1,\ 2-k) = m(4,\ -10)$$

これより，$\begin{cases} k+1 = 4m & \cdots ① \\ 2-k = -10m & \cdots ② \end{cases}$

$① \times 5 + ② \times 2$ より

$$5(k+1) + 2(2-k) = 0$$
$$5k+5+4-2k = 0$$
$$3k = -9$$

よって，$\boldsymbol{k = -3}$

18　$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$$= 2^2 - 2\cdot 2 + (\sqrt{3})^2$$
$$= 4-4+3 = 3 \fallingdotseq 0$$

$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$
$$= 2^2 + 4\cdot 2 + 4\cdot(\sqrt{3})^2$$
$$= 4+8+12 = 24 \fallingdotseq 0$$

よって，$\vec{a}-\vec{b} \fallingdotseq \vec{0}$，$\vec{a}+2\vec{b} \fallingdotseq \vec{0}$

$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+2\vec{b}$ の内積を求めると

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot 2\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} - 2|\vec{b}|^2$$
$$= |\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} - 2|\vec{b}|^2$$
$$= 2^2 + 2 - 2\cdot(\sqrt{3})^2$$
$$= 4+2-6 = 0$$

よって，$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+2\vec{b}$ は直交する．

19　ベクトルの垂直条件より，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ であるから

$$2(k-1) + (-1)\cdot k = 0$$
$$2k-2-k = 0$$
$$k = 2$$

このとき，$\vec{b} = (2-1,\ 2) = (1,\ 2) \fallingdotseq \vec{0}$

よって，$\boldsymbol{k = 2}$

20　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(k,\ 2)-(0,\ 0)$

$=(k,\ 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(k,\ 2)-(9,\ -2)$

$=(k-9,\ 4)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ であるから

$k(k-9)+2\cdot 4=0$

$k^2-9k+8=0$

$(k-1)(k-8)=0$

よって，$\boldsymbol{k=1,\ 8}$

21　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4+3}=\boldsymbol{\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+4}=\boldsymbol{\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-3,\ 5)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(4,\ -9)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7}\\&=\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{3}{7}(-3,\ 5)+\frac{4}{7}(4,\ -9)\\&=\left(-\frac{9}{7},\ \frac{15}{7}\right)+\left(\frac{16}{7},\ -\frac{36}{7}\right)\\&=\left(-\frac{9}{7}+\frac{16}{7},\ \frac{15}{7}-\frac{36}{7}\right)\\&=\left(\frac{7}{7},\ -\frac{21}{7}\right)=(1,\ -3)\end{aligned}$$

よって，点 P の座標は，$\boldsymbol{(1,\ -3)}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7}\\&=\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{4}{7}(-3,\ 5)+\frac{3}{7}(4,\ -9)\\&=\left(-\frac{12}{7},\ \frac{20}{7}\right)+\left(\frac{12}{7},\ -\frac{27}{7}\right)\\&=\left(-\frac{12}{7}+\frac{12}{7},\ \frac{20}{7}-\frac{27}{7}\right)\\&=\left(0,\ -\frac{7}{7}\right)=(0,\ -1)\end{aligned}$$

よって，点 Q の座標は，$\boldsymbol{(0,\ -1)}$

22　△ABC の重心 G の位置ベクトルは，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$ である．

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-2,\ -3)$　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-1,\ 4)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=\frac{1}{3}\{(1,\ 2)+(-2,\ -3)+(-1,\ 4)\}\\&=\frac{1}{3}(1-2-1,\ 2-3+4)\\&=\frac{1}{3}(-2,\ 3)=\left(-\frac{2}{3},\ 1\right)\end{aligned}$$

よって，点 G の座標は，$\boldsymbol{\left(-\dfrac{2}{3},\ 1\right)}$

23　$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}}&=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\vec{b}-\vec{a}\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{MN}}$ である．

24　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

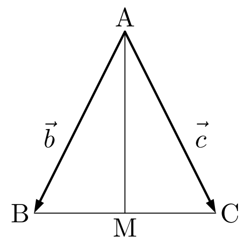
$=(4,\ -2)-(1,\ 0)=(3,\ -2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=(-2,\ 2)-(1,\ 0)=(-3,\ 2)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，3 点 A，B，C は一直線上にある．

25　下の図のように，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする．



二等辺三角形の定義より，$|\vec{b}|=|\vec{c}|\cdots$①

点 M は辺 BC の中点だから

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=\vec{c}-\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の内積を求めると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\left\{\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\right\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=\frac{1}{2}\left(|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2\right)\end{aligned}$$

ここで，① より，$|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，すなわち，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ である．

26　（1）　直線上の任意の点の座標を $(x,\ y)$，t を実数とすると

$(x,\ y)=(1,\ -1)+t(-3,\ 2)$

$=(1-3t,\ -1+2t)$

成分を比較して

$\begin{cases}\boldsymbol{x=1-3t}\\\boldsymbol{y=-1+2t}\end{cases}$　（t は実数）

（2）　直線上の任意の点の座標を $(x,\ y)$，t を実数とすると

$(x,\ y)=(3,\ -2)+t(2,\ 0)$

$=(3+2t,\ -2)$

成分を比較して

$\begin{cases}\boldsymbol{x=3+2t}\\\boldsymbol{y=-2}\end{cases}$　（t は実数）

※ 任意の実数 t に対して，常に $y=-2$ であるから，$x=3+2t$ はなくてもよい．

（3）　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルと考える．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(7,\ -3)-(2,\ 5)=(5,\ -8)$

点 A を通り，$(5,\ -8)$ を方向ベクトルとする直線上の任意の点の座標を $(x,\ y)$，t を実数とすると

$(x,\ y)=(2,\ 5)+t(5,\ -8)$

$=(2+5t,\ 5-8t)$

成分を比較して

$\begin{cases}\boldsymbol{x=2+5t}\\ \boldsymbol{y=5-8t}\end{cases}$ （t は実数）

※ この解答以外にも，点 B を通り，$(5,\ -8)$ を方向ベクトルとする直線を考えれば

$\begin{cases}\boldsymbol{x=7+5t}\\ \boldsymbol{y=-3-8t}\end{cases}$ （t は実数）

点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-5,\ 8)$ を方向ベクトルとすれば

$\begin{cases}\boldsymbol{x=2-5t}\\ \boldsymbol{y=5+8t}\end{cases}$ （t は実数）

点 B を通り，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-5,\ 8)$ を方向ベクトルとすれば

$\begin{cases}\boldsymbol{x=7-5t}\\ \boldsymbol{y=-3+8t}\end{cases}$ （t は実数）

27 （1） $\boldsymbol{(2,\ -3)}$

（2） $y=-\dfrac{2}{7}x-1$ より，$7y=-2x-7$，すなわち，$2x+7y+7=0$ であるから

$\boldsymbol{(2,\ 7)}$

28 （1） $\dfrac{|-3\cdot 0+2\cdot 0+5|}{\sqrt{(-3)^2+2^2}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{13}}$

$=\boldsymbol{\dfrac{5}{\sqrt{13}}}$

（2）$y=-2x+3$ より，$2x+y-3=0$ であるから

$\dfrac{|2\cdot(-3)+2-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|-7|}{\sqrt{5}}$

$=\boldsymbol{\dfrac{7}{\sqrt{5}}}$

29 （1） 点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,\ -2)-(0,\ 1)=(5,\ -3)$ を方向ベクトルとする直線の式を求めればよい．

直線上の任意の点の座標を $(x,\ y)$，t を実数とすると

$(x,\ y)=(0,\ 1)+t(5,\ -3)$

$=(5t,\ 1-3t)$

成分を比較して

$\begin{cases}x=5t & \cdots①\\ y=1-3t & \cdots②\end{cases}$

① より，$t=\dfrac{x}{5}$

② に代入して

$y=1-3\cdot\dfrac{x}{5}=-\dfrac{3}{5}x+1$

これより，$5y=-3x+5$

したがって，$\boldsymbol{3x+5y-5=0}$

〔別解〕

求める方程式は

$y-1=\dfrac{-2-1}{5-0}(x-0)$

$y-1=-\dfrac{3}{5}x$

$5(y-1)=-3x$

$5y-5=-3x$

よって，$\boldsymbol{3x+5y-5=0}$

（2）点 C と直線 AB との距離を d とすると

$d=\dfrac{|3\cdot 3+5\cdot 4-5|}{\sqrt{3^2+5^2}}$

$=\dfrac{|24|}{\sqrt{34}}=\boldsymbol{\dfrac{24}{\sqrt{34}}}$

（3） $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(5-0)^2+(-2-1)^2}\cdot\dfrac{24}{\sqrt{34}}$

$=\dfrac{12}{\sqrt{34}}\sqrt{25+9}$

$=\dfrac{12}{\sqrt{34}}\sqrt{34}=\boldsymbol{12}$

30 （1） $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ とおくと

$(1,\ 2)=m(-1,\ 2)+n(1,\ -1)$

$=(-m+n,\ 2m-n)$

成分を比較して

$\begin{cases}1=-m+n & \cdots①\\ 2=2m-n & \cdots②\end{cases}$

①＋② より，$3=m$

これを ① に代入して

$1=-3+n$

$n=4$

よって，$\boldsymbol{\vec{c}=3\vec{a}+4\vec{b}}$

（2） $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}$ とおくと

$(-3,\ 5)=m(-1,\ 2)+n(1,\ -1)$

$=(-m+n,\ 2m-n)$

成分を比較して

$\begin{cases}-3=-m+n & \cdots①\\ 5=2m-n & \cdots②\end{cases}$

①＋② より，$2=m$

これを ① に代入して

$-3=-2+n$

$n=-1$

よって，$\boldsymbol{\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}}$

31 （1） $\vec{a},\ \vec{b}$ が線形独立であるから

$\begin{cases}2x=-4 & \cdots①\\ -y+1=2 & \cdots②\end{cases}$

① より，$x=-2$

② より，$y=-1$

よって，$\boldsymbol{x=-2,\ y=-1}$

（2） 右辺 $=(-y-1)\vec{a}+2\vec{b}$

よって，$(x+y)\vec{a}+(x-y)\vec{b}=(-y-1)\vec{a}+2\vec{b}$

$\vec{a},\ \vec{b}$ が線形独立であるから

$\begin{cases}x+y=-y-1 & \cdots①\\ x-y=2 & \cdots②\end{cases}$

① より，$x+2y=-1\cdots①'$

①′－② より

$3y=-3$

$y=-1$

これを ② に代入して

$x-(-1)=2$

$x=1$

したがって，$\boldsymbol{x=1,\ y=-1}$

32　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．

点 L は線分 AB を 3 : 2 に内分する点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{3+2}$$
$$=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$$

点 P は線分 OL 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ となる実数 s が存在するから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\right)$$
$$=\frac{2s}{5}\vec{a}+\frac{3s}{5}\vec{b}\qquad\cdots①$$

また, 点 P は線分 AM 上にあるので, 実数 t を用いて, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおけば

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$
$$=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

ここで，点 M は線分 OB の中点だから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{2}\vec{b}\quad\cdots②$

①, ② より

$$\frac{2s}{5}\vec{a}+\frac{3s}{5}\vec{b}=(1-t)\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は線形独立なので

$$\begin{cases}\dfrac{2s}{5}=1-t\\[2mm]\dfrac{3s}{5}=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases}2s+5t=5 & \cdots①\\[2mm]6s=5t & \cdots②\end{cases}$$

② を ① に代入して

$$2s+6s=5$$
$$s=\frac{5}{8}$$

これを ② に代入して

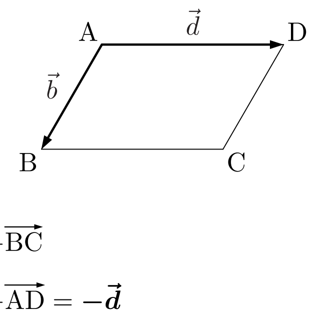
$$6\cdot\frac{5}{8}=5t$$
$$5t=\frac{15}{4}$$
$$t=\frac{3}{4}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ となるので

AP : PM = 3 : 1

CHECK

33



（1）与式 $=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$$=-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{-\vec{d}}$$

（2）与式 $=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

$$=-\vec{d}+(-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$$
$$=-\vec{d}+(-\vec{b})$$
$$=\boldsymbol{-\vec{d}-\vec{b}}$$

（3）与式 $=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$=\boldsymbol{-\vec{b}+\vec{d}}$$

34 $-\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{a}-4\vec{x}=\vec{x}+2\vec{a}-\vec{b}$

$$-4\vec{x}-\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{a}+2\vec{b}-4\vec{a}$$
$$-5\vec{x}=-\vec{a}+\vec{b}$$
$$\boldsymbol{\vec{x}=\frac{1}{5}\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}}$$

35（1）$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$$=(-1,\ 1)-(2,\ -3)$$
$$=(-1-2,\ 1-(-3))$$
$$=\boldsymbol{(-3,\ 4)}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(-3)^2+4^2}$$
$$=\sqrt{25}=\mathbf{5}$$

（2）$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$$=(x,\ y)-(2,\ -3)$$
$$=(x-2,\ y+3)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$$(x-2,\ y+3)=k(-3,\ 4)$$
$$=(-3k,\ 4k)$$

これより，$\begin{cases}x-2=-3k & \cdots①\\ y+3=4k & \cdots②\end{cases}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は単位ベクトルであるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=1$

よって，$(x-2)^2+(y+3)^2=1\quad\cdots③$

①, ② を ③ に代入して

$$(-3k)^2+(4k)^2=1$$
$$25k^2=1$$
$$k^2=\frac{1}{25}$$

$k>0$ なので，$k=\sqrt{\dfrac{1}{25}}=\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

これを，①, ② に代入して

$$x=-3k+2=-3\cdot\frac{1}{5}+2=\frac{7}{5}$$
$$y=4k-3=4\cdot\frac{1}{5}-3=-\frac{11}{5}$$

よって，点 C の座標は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{7}{5},\ -\dfrac{11}{5}\right)}$

36（1）与式 $=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot2\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot2\vec{b}$

$$=\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2\left|\vec{b}\right|^2$$
$$=2^2+1-2\cdot3^2$$
$$=4+1-18=\mathbf{-13}$$

（2）与式 $=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$$
$$=2^2+2\cdot1+3^2$$
$$=4+2+9=\mathbf{15}$$

37（1）　ベクトルの平行条件より，$\vec{b}=m\vec{a}$ となる実数 m が存在するから

$(-1,\ k)=m(2,\ 1)$

これより，$\begin{cases}-1=-2m & \cdots ① \\ k=m & \cdots ②\end{cases}$

① より，$m=-\dfrac{1}{2}$

これを ② に代入して

$\boldsymbol{k=-\dfrac{1}{2}}$

（2）　ベクトルの垂直条件より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるから

$2\cdot(-1)+1\cdot k=0$

$-2+k=0$

$\boldsymbol{k=2}$

38（1）　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boldsymbol{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\boldsymbol{3}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-2,\ 1)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{1}{3}(1,\ -1)+\frac{2}{3}(-2,\ 1)\\&=\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)\\&=\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

よって，点 P の座標は，$\boldsymbol{\left(-1,\ \dfrac{1}{3}\right)}$

（2）　重心 G の位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\\&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=\frac{1}{3}\{(1,\ -1)+(-2,\ 1)+(0,\ 4)\}\\&=\frac{1}{3}(1-2+0,\ -1+1+4)\\&=\frac{1}{3}(-1,\ 4)=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

よって，点 G の座標は，$\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)}$

39　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=(-4,\ -1)-(-2,\ 0)=(-2,\ -1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=(0,\ 1)-(-2,\ 0)=(2,\ 1)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，3 点 A，B，C は一直線上にある．

40　直線上の任意の点の座標を $(x,\ y)$，t を実数とすると

$(x,\ y)=(1,\ 2)+t(2,\ -1)$

$=(1+2t,\ 2-t)$

成分を比較して

$\begin{cases}\boldsymbol{x=1+2t}\\ \boldsymbol{y=2-t}\end{cases}$　（t は実数）

41（1）　$\boldsymbol{(-1,\ 2)}$

（2）　$\dfrac{|-(-1)+2\cdot1+2|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

42　$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ とおくと

$(-1,\ 3)=m(2,\ 1)+n(1,\ 2)$

$=(2m+n,\ m+2n)$

成分を比較して

$\begin{cases}-1=2m+n & \cdots ①\\ 3=m+2n & \cdots ②\end{cases}$

① − ② × 2 より，$-7=-3n$

よって，$n=\dfrac{7}{3}$

これを ② に代入して

$3=m+2\cdot\dfrac{7}{3}$

$3=m+\dfrac{14}{3}$

$m=3-\dfrac{14}{3}=-\dfrac{5}{3}$

よって，$\boldsymbol{\vec{c}=-\dfrac{5}{3}\vec{a}+\dfrac{7}{3}\vec{b}}$

43　左辺 $=(x+2)\vec{a}-3\vec{b}$

よって，$(x+2)\vec{a}-3\vec{b}=y\vec{a}-(2-x)\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ が線形独立であるから

$\begin{cases}x+2=y & \cdots ①\\ -3=-(2-x) & \cdots ②\end{cases}$

② より，$-3=-2+x$，すなわち，$x=-1$

これを ① に代入して

$-1+2=y$

$y=1$

したがって，$\boldsymbol{x=-1,\ y=1}$

44　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．

点 M は線分 AB の中点なので

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

点 P は線分 OM 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となる実数 s が存在するから

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)$

$=\dfrac{s}{2}\vec{a}+\dfrac{s}{2}\vec{b}$　　$\cdots ①$

また, 点 P は線分 BN 上にあるので, 実数 t を用いて, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BN}}$ とおけば

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BN}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{ON}}\end{aligned}$$

ここで, 点 N は線分 OA を $1:2$ に内分する点だから, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{b}+\dfrac{t}{3}\vec{a}$　$\cdots ②$

①, ② より

$\dfrac{s}{2}\vec{a}+\dfrac{s}{2}\vec{b}=\dfrac{t}{3}\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は線形独立なので

$\begin{cases}\dfrac{s}{2}=\dfrac{t}{3} & \cdots ①\\ \dfrac{s}{2}=1-t\end{cases}$

2 式より，$\dfrac{t}{3}=1-t$

$t=3-3t$

$t=\dfrac{3}{4}$

① より，$3s=2t$，すなわち，$s=\dfrac{2}{3}t$ であるから

$s = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となるので

$\mathbf{OP : PM = 1 : 1}$

STEP UP

45（1）　$\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right| = 2\sqrt{13}$ の両辺を 2 乗すると

$$\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right|^2 = (2\sqrt{13})^2$$
$$= 52$$

ここで

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) \\ &= 4\left|\vec{a}\right|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\left|\vec{b}\right|^2 \\ &= 4 \cdot 1^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 \cdot 2^2 \\ &= -12\vec{a} \cdot \vec{b} + 40 \end{aligned}$$

よって，$-12\vec{a} \cdot \vec{b} + 40 = 52$ であるから

$$-12\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$$

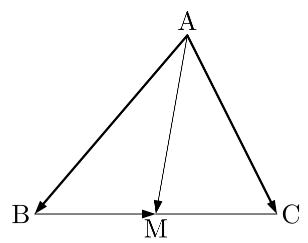
したがって，$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = -1}$

（2）　2 つのベクトルのなす角を θ とすると

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} \\ &= \frac{-1}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\theta = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$

46（1）



M は線分 BC の中点だから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AM}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BM}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})} \end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|^2 &= \left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right|^2 &= \left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\right) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 2\left\{\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\right)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\right)\right\} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\right) \\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \text{左辺} \end{aligned}$$

47（1）　与式を変形すると

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3} \\ &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1} \end{aligned}$$

よって，点 P は**線分 AB を 2 : 1 に内分する点**である．

（2）

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

であるから，これらを用いて与式を変形すると

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) &= \vec{0} \\ 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2} \end{aligned}$$

よって，点 P は**線分 AB の中点**である．

（3）　（2）の 2 式を用いて与式を変形すると

$$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + 3(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) &= \vec{0} \\ 5\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5} \\ &= \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+2} \end{aligned}$$

よって，点 P は**線分 AB を 3 : 2 に内分する点**である．

（4）

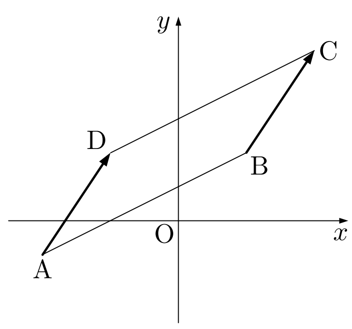
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であるから，これらを用いて与式を変形すると

$$\begin{aligned} 3(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + 2(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + 6(\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) &= \vec{0} \\ 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 6\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} - 6\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ -4\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= -3\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4} \\ &= \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+3} \end{aligned}$$

よって，点 P は**線分 AB を 1 : 3 に内分する点**である．

48



四角形 ABCD が平行四辺形になるためには，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となればよい．（または，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ など）

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=(x,\ y)-(-4,\ -1)$$
$$=(x+4,\ y+1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=(4,\ 5)-(2,\ 2)$$
$$=(2,\ 3)$$

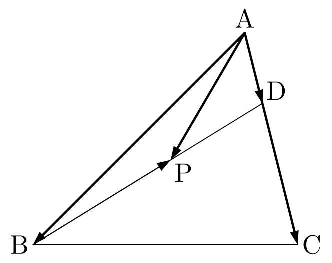
成分を比較して

$$\begin{cases} x+4=2 & \cdots ① \\ y+1=3 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$x=-2$，② より，$y=2$

以上より，$\boldsymbol{x=-2,\ y=2}$

49（1）



$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=t\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$=s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdots ①$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=t\overrightarrow{\mathrm{BP}}$$
$$=t(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$$
$$=t\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$
$$=t\left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
$$=-\frac{3t}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{t}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdots ②$$

①, ② より

$$-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{3t}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{t}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は線形独立であるから

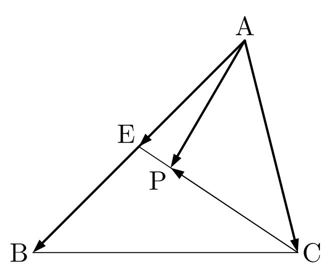
$$\begin{cases} -1=-\dfrac{3t}{5} & \cdots ③ \\ s=\dfrac{t}{5} & \cdots ④ \end{cases}$$

③ より，$t=\dfrac{5}{3}$　④ に代入して，$s=\dfrac{1}{3}$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

これより，$\mathbf{AD:DC=1:2}$



$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=l\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdots ⑤$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=l\overrightarrow{\mathrm{CP}}$$
$$=l(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$
$$=l\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
$$=l\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
$$=\frac{2l}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{4l}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdots ⑤$$

⑤, ⑥ より

$$k\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{2l}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{4l}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は線形独立であるから

$$\begin{cases} k=\dfrac{2l}{5} & \cdots ⑦ \\ -1=-\dfrac{4l}{5} & \cdots ⑧ \end{cases}$$

⑧ より，$l=\dfrac{5}{4}$　⑦ に代入して，$k=\dfrac{1}{2}$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

これより，$\mathbf{AE:EB=1:1}$

（2）　点 F は線分 AP の中点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
$$=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

点 J は線分 BC の中点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

点 K は線分 DE の中点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

以上より

$$\overrightarrow{\mathrm{FJ}}=\overrightarrow{\mathrm{AJ}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)-\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
$$=\frac{5-2}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5-1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{FK}}=\overrightarrow{\mathrm{AK}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$
$$=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)-\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
$$=\frac{5-4}{20}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5-3}{30}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{1}{20}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{15}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{FJ}} = \frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= 6\left(\frac{1}{20}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{15}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
$$= 6\overrightarrow{\mathrm{FK}}$$

したがって，3 点 F，J，K は一直線上に並ぶ．

50　（1）
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5-2}$$
$$= \frac{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$$

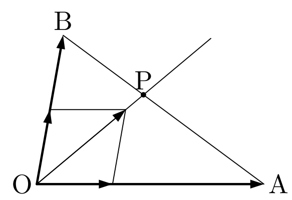
ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (4,\ -2)$ であるから
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\{-2(1,\ 3) + 5(4,\ -2)\}$$
$$= \frac{1}{3}\{(-2,\ -6) + (20,\ -10)\}$$
$$= \frac{1}{3}(18,\ -16) = \left(6,\ -\frac{16}{3}\right)$$

よって，点 P の座標は，$\left(\mathbf{6},\ -\mathbf{\frac{16}{3}}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{-4\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3-4}$$
$$= 4\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= 4(1,\ 3) - 3(4,\ -2)$$
$$= (4,\ 12) - (12,\ -6) = (-8,\ 18)$$

よって，点 Q の座標は，$(\mathbf{-8,\ 18})$

51



例題より，∠AOB の 2 等分線の方向ベクトルは，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{3} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right)$ と表すことができる．

また，点 P は辺 AB 上の点なので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$ と表せる．

よって
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{6}$$
$$= t\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}$$
$$= \frac{5t}{6}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}$$

これより，$\dfrac{5t}{6} = 1$ すなわち，$t = \dfrac{6}{5}$ のとき，点 P は辺 AB 上の点となり，$\mathbf{AP : PB = 3 : 2}$ である．

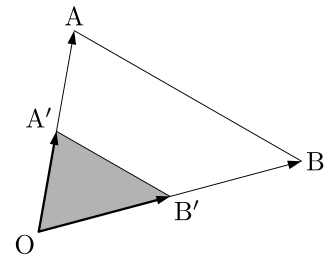
52　（1）　$0 < s + t < \dfrac{1}{2}$ より，$0 < 2s + 2t < 1$

ここで，$2s = s'$，$2t = t'$ とおくと
$$s' > 0,\quad t' > 0,\quad 0 < s' + t' < 1 \quad \cdots①$$

これより
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= 2s\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2t\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= s'\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t'\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

さらに，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とおけば
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$$

と表せる．これと ① より，点 P の存在範囲は，三角形 OA′B′ の，周を除く内部であるから，下の図の影をつけた部分である．ただし，A′，B′ はそれぞれ辺 OA，OB の中点であり，境界線を含まない．



（2）　$2s = s'$ とおくと
$$s' > 0,\quad t > 0,\quad 0 < s' + t < 1 \quad \cdots①$$

これより
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= 2s\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= s'\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

さらに，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ とおけば
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表せる．これと ① より，点 P の存在範囲は，三角形 OA′B の，周を除く内部であるから，下の図の影をつけた部分である．ただし，A′ は辺 OA の中点であり，境界線を含まない．