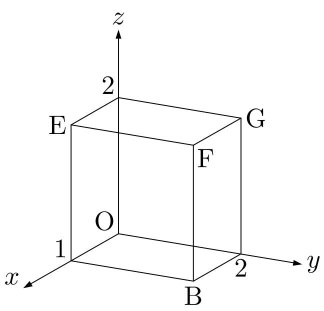
BASIC

53

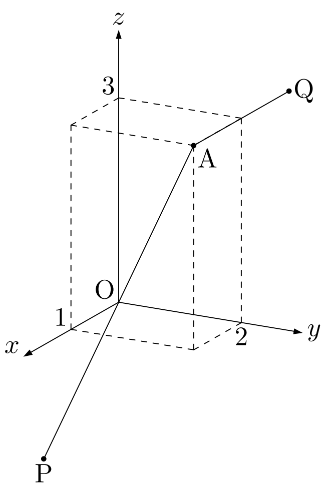


図より

$\mathbf{B\,(1,\ 2,\ 0)}$, $\mathbf{E\,(1,\ 0,\ 2)}$

$\mathbf{F\,(1,\ 2,\ 2)}$, $\mathbf{G\,(0,\ 2,\ 2)}$

54



（1）　図より，$\mathbf{P\,(-1,\ -2,\ -3)}$

（2）　図より，$\mathbf{Q\,(-1,\ 2,\ 3)}$

55　$\sqrt{(-1-2)^2+\{2-(-1)\}^2+(1-3)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+3^2+(-2)^2}$

$= \sqrt{9+9+4} = \boldsymbol{\sqrt{22}}$

56　$\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(-2-0)^2+(-3-z)^2} = 4$ であるから

$2^2+(-2)^2+(-3-z)^2 = 16$

これを解くと

$4+4+(z^2+6z+9)-16 = 0$

$z^2+6z+1 = 0$

$z = -3 \pm \sqrt{3^2-1\cdot 1}$

$= -3 \pm \sqrt{8}$

$= \boldsymbol{-3 \pm 2\sqrt{2}}$

57（1）　与式 $= (1,\ -1,\ 1)-(-2,\ 1,\ 0)$

$= (1-(-2),\ -1-1,\ 1-0)$

$= (3,\ -2,\ 1)$

よって

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}$

$= \sqrt{9+4+1}$

$= \boldsymbol{\sqrt{14}}$

（2）　与式 $= 2(1,\ -1,\ 1)+3(-2,\ 1,\ 0)$

$= (2,\ -2,\ 2)+(-6,\ 3,\ 0)$

$= (2+(-6),\ -2+3,\ 2+0)$

$= (-4,\ 1,\ 2)$

よって

$\left|2\vec{a}+3\vec{b}\right| = \sqrt{(-4)^2+1^2+2^2}$

$= \sqrt{16+1+4}$

$= \boldsymbol{\sqrt{21}}$

58　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$= (-4,\ 3,\ -1)-(1,\ -1,\ 2)$

$= (-4-1,\ 3-(-1),\ -1-2) = \mathbf{(-5,\ 4,\ -3)}$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$= (7,\ -3,\ 2)-(2,\ 1,\ -1)$

$= (7-2,\ -3-1,\ 2-(-1)) = \mathbf{(5,\ -4,\ 3)}$

この結果より，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{CD}}$

また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|$

以上より，AB // CD，AB = CD であるから，四角形 ABCD は**平行四辺形**である.

59（1）　求める座標は

$\left(\dfrac{3\cdot 1+2\cdot(-4)}{2+3},\ \dfrac{3\cdot(-4)+2\cdot 6}{2+3},\ \dfrac{3\cdot(-3)+2\cdot 2}{2+3}\right)$

$= \left(\dfrac{3-8}{5},\ \dfrac{-12+12}{5},\ \dfrac{-9+4}{5}\right)$

$= \mathbf{(-1,\ 0,\ -1)}$

（2）　求める座標は

$\left(\dfrac{2\cdot 1+3\cdot(-4)}{3+2},\ \dfrac{2\cdot(-4)+3\cdot 6}{3+2},\ \dfrac{2\cdot(-3)+3\cdot 2}{3+2}\right)$

$= \left(\dfrac{2-12}{5},\ \dfrac{-8+18}{5},\ \dfrac{-6+6}{5}\right)$

$= \mathbf{(-2,\ 2,\ 0)}$

60（1）　G の位置ベクトルを $\vec{g}$ とすると

$\vec{g} = \boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}}{3}}$

（2）　点 P の位置ベクトルは

$\dfrac{1\vec{b}+3\vec{g}}{3+1} = \dfrac{\vec{b}+3\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}}{3}}{4}$

$= \boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}}$

61（1）　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 2+2\cdot(-1)+1\cdot(-3)$

$= 2-2-3 = \mathbf{-3}$

（2）　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot(-1)+(-5)\cdot 0+6\cdot 1$

$= -4+0+6 = \mathbf{2}$

62　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする.

（1）　$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$= \dfrac{-1\cdot 2 + 0\cdot 2 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}}$

$= \dfrac{-2+0-1}{\sqrt{1+0+1}\sqrt{4+4+1}}$

$= \dfrac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{9}}$

$= -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\theta = \boldsymbol{\dfrac{3}{4}\pi}$

（2）　$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$= \dfrac{1\cdot 2 + (-3)\cdot 4 + 2\cdot 5}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}\sqrt{2^2+4^2+5^2}}$

$= \dfrac{2-12+10}{\sqrt{1+9+4}\sqrt{4+16+25}}$

$= \dfrac{0}{\sqrt{14}\sqrt{45}} = 0$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

63　求める単位ベクトルを $\vec{c} = (x,\ y,\ z)$ とする．

$|\vec{c}| = 1$ より，$x^2+y^2+z^2 = 1\quad\cdots①$

$\vec{a}\perp\vec{c}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ であるから，$x+3y-2z = 0\quad\cdots②$

$\vec{b}\perp\vec{c}$ より，$\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ であるから，$2x-y+3z = 0\quad\cdots③$

② + ③ × 3 より，$7x+7z = 0$，すなわち，$x = -z$

これを，② に代入して

$-z+3y-2z = 0$

$3y = 3z$，すなわち，$y = z$

これらを ① に代入して

$z^2+z^2+z^2 = 1$

$3z^2 = 1$

$z^2 = \dfrac{1}{3}$

$z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，求める単位ベクトルは，$\boldsymbol{\left(\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

（複号同順）

64（1）　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$

$= \boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}}$

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$= \vec{b} - \vec{a}$

よって

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$= \dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$= \dfrac{1}{3}\left(\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b} - \vec{c}\cdot\vec{a}\right)$

$= \dfrac{1}{3}\left(|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 + \vec{c}\cdot\vec{b} - \vec{c}\cdot\vec{a}\right)$

ここで，正四面体の各面は正三角形なので

$|\vec{b}| = |\vec{a}| = |\vec{c}|$

また，$\vec{c}$ と $\vec{b}$，$\vec{c}$ と $\vec{a}$ のなす角はいずれも $\dfrac{\pi}{3}$ なので

$\vec{c}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{a}$

よって，$\dfrac{1}{3}\left(|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 + \vec{c}\cdot\vec{b} - \vec{c}\cdot\vec{a}\right) = 0$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である．

したがって，$\mathrm{OG}\perp\mathrm{AB}$

65（1）　直線上の点の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$(x,\ y,\ z) = (1,\ -2,\ -1) + t(-2,\ 1,\ 3)$

$= (1-2t,\ -2+t,\ -1+3t)$

よって

$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1-2t} \\ \boldsymbol{y = -2+t} \\ \boldsymbol{z = -1+3t} \end{cases}$　（t は実数）

または，t を消去して

$\boldsymbol{\dfrac{x-1}{-2} = y+2 = \dfrac{z+1}{3}}$

（2）　直線上の点の座標を $(x,\ y,\ z)$ とし，$(1,\ -2,\ 3) - (-1,\ 1,\ 1) = (2,\ -3,\ 2)$ を方向ベクトル，通る点を $(1,\ -2,\ 3)$ とすると

$(x,\ y,\ z) = (1,\ -2,\ 3) + t(2,\ -3,\ 2)$

$= (1+2t,\ -2-3t,\ 3+2t)$

よって

$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1+2t} \\ \boldsymbol{y = -2-3t} \\ \boldsymbol{z = 3+2t} \end{cases}$　（t は実数）

または，t を消去して

$\boldsymbol{\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-3}{2}}$

66　直線 $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$ の方向ベクトルを $\vec{v_1}$ とすると

$\vec{v_1} = (3,\ 2,\ -1)$

直線 $\dfrac{x+2}{-2} = y+1 = \dfrac{z-2}{3}$ の方向ベクトルを $\vec{v_2}$ とすると

$\vec{v_2} = (-2,\ 1,\ 3)$

$\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ のなす角を θ とすれば

$\cos\theta = \dfrac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|}$

$= \dfrac{3\cdot(-2)+2\cdot 1+(-1)\cdot 3}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}}$

$= \dfrac{-6+2-3}{\sqrt{9+4+1}\sqrt{4+1+9}}$

$= \dfrac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\theta = 120^\circ$

したがって，2 直線のなす角は，$180^\circ - 120^\circ = \boldsymbol{60^\circ}$

67　直線 $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-3}{6}$ の方向ベクトルを $\vec{v_1}$ とすると

$\vec{v_1} = (3,\ 4,\ 6)$

直線 $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+1}{k} = \dfrac{z+2}{5}$ の方向ベクトルを $\vec{v_2}$ とすると

$\vec{v_2} = (-4,\ k,\ 5)$

$\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ が直交すればよいので，$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = 0$ となればよい．

$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = 3\cdot(-4)+4\cdot k+6\cdot 5$

$= -12+4k+30$

$= 4k+18 = 0$

これより，$\boldsymbol{k = -\dfrac{9}{2}}$

68（1）　平面上の点の座標を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，点 $(1,\ -2,\ -1)$ を A とする．

$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x,\ y,\ z) - (1,\ -2,\ -1) = (x-1,\ y+2,\ z+1)$

なので

$-2(x-1)+1(y+2)+3(z+1)=0$
$-2x+2+y+2+3z+3=0$
よって，$\boldsymbol{2x-y-3z-7=0}$

（2）　平面 $-x+2y-3z=2$ の法線ベクトルの 1 つは，$(-1,\ 2,\ -3)$ であり，求める平面もこれを法線ベクトルとするので，平面上の点の座標を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，点 $(1,\ -1,\ -1)$ を A，$\vec{n}=(-1,\ 2,\ -3)$ とすると，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y,\ z)-(1,\ -1,\ -1)=(x-1,\ y+1,\ z+1)$
なので
$-(x-1)+2(y+1)-3(z+1)=0$
$-x+1+2y+2-3z-3=0$
よって，$\boldsymbol{x-2y+3z=0}$

（3）　求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とおく．
与えられた 3 点を通ることから

$$\begin{cases} a-b+c+d=0 & \cdots① \\ 2a+2b-c+d=0 & \cdots② \\ 3a-2b+4c+d=0 & \cdots③ \end{cases}$$

① + ② より，$3a+b+2d=0$　$\cdots④$
② × 4 + ③ より，$11a+6b+5d=0$　$\cdots⑤$
④ × 6 − ⑤ より，$7a+7d=0$
これより，$a=-d$　$\cdots⑥$
⑥ を ④ に代入して，$-3d+b+2d=0$
これより，$b=d$　$\cdots⑦$
⑥，⑦ を ① に代入して，$-d-d+c+d=0$
これより，$c=d$　$\cdots⑧$
⑥，⑦，⑧ より，求める方程式は
$-dx+dy+dz+d=0$　$\cdots⑨$ となる．
ここで，$d=0$ とすると，$a=b=c=0$ となるから，$d\neq 0$ である．
⑨ の両辺を $-d$ で割って
$\boldsymbol{x-y-z-1=0}$

69　平面 $2x+3y+6z+3=0$ の法線ベクトルの 1 つは，$(2,\ 3,\ 6)$
平面 $4x-y-9z-2=0$ の法線ベクトルの 1 つは，$(4,\ -1,\ -9)$
これら 2 つの法線ベクトルのなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{2\cdot4+3\cdot(-1)+6\cdot(-9)}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\sqrt{4^2+(-1)^2+(-9)^2}}$$
$$=\frac{8-3-54}{\sqrt{4+9+36}\sqrt{16+1+81}}$$
$$=\frac{-49}{\sqrt{49}\sqrt{98}}$$
$$=\frac{-49}{7\cdot7\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$\theta=135^\circ$ より，2 平面のなす角は $180^\circ-135^\circ=\boldsymbol{45^\circ}$

70　平面 $(k-1)x-2y+z-1=0$ の法線ベクトルの 1 つは，$(k-1,\ -2,\ -1)$
平面 $-x+3y-kz+3=0$ の法線ベクトルの 1 つは，$(-1,\ 3,\ k)$
2 平面が垂直のとき，これら 2 つの法線ベクトルも垂直となるので，内積が 0 となる．
よって，$(k-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot3+(-1)\cdot k=0$
これを解いて
$-k+1-6-k=0$
$-2k=5$
したがって，$\boldsymbol{k=-\frac{5}{2}}$

71（1）

$$\frac{|-3\cdot(-1)+2\cdot1-(-2)-7|}{\sqrt{(-3)^2+2^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{|3+2+2-7|}{\sqrt{9+4+1}}$$
$$=\frac{|0|}{\sqrt{14}}=\boldsymbol{0}$$

（2）

$$\frac{|-3\cdot1+2\cdot(-2)-(-3)-7|}{\sqrt{(-3)^2+2^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{|-3-4+3-7|}{\sqrt{9+4+1}}$$
$$=\frac{|-11|}{\sqrt{14}}=\boldsymbol{\frac{11}{\sqrt{14}}}$$

72（1）　$\{x-(-1)\}^2+(y-1)^2+\{z-(-2)\}^2=(\sqrt{7})^2$
よって，$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=7}$

（2）　半径を r とすると，求める球の方程式は，$x^2+y^2+z^2=r^2$ と表すことができる．
この球が点 $(1,\ -2,\ 2)$ を通るので
$1^2+(-2)^2+2^2=r^2$
$1+4+4=r^2$
よって，$r^2=9$
したがって，$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=9}$

（3）　半径を r とすると，求める球の方程式は
$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=r^2$
と表すことができる．
この球が点 $(-2,\ 6,\ 2)$ を通るので
$(-2-1)^2+(6-1)^2+(2+2)^2=r^2$
$9+25+16=r^2$
よって，$r^2=50$
したがって，$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=50}$

（4）　中心の座標は，与えられた 2 点の中点だから

$$\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{3-1}{2},\ \frac{-2+0}{2}\right)=(2,\ 1,\ -1)$$

また，半径は，与えられた 2 点を結ぶ線分の長さの $\frac{1}{2}$ だから

$$\frac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2+(-1-3)^2+(0+2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{36+16+4}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{56}=\sqrt{14}$$

よって，$(x-2)^2+(y-1)^2+\{z-(-1)\}^2=(\sqrt{14})^2$
すなわち，$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14}$

73（1）　$x^2-2x+y^2+4y+z^2-4z-3=0$
$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z-2)^2-4-3=0$
$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=12$
$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=(2\sqrt{3})^2$
よって，中心は，$\boldsymbol{(1,\ -2,\ 2)}$，半径は，$\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

（2）　$x^2-4x+y^2+2y+z^2=0$
$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1+z^2=0$
$(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=5$
$(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=(\sqrt{5})^2$
よって，中心は，$\boldsymbol{(2,\ -1,\ 0)}$，半径は，$\boldsymbol{\sqrt{5}}$

74　交点 R は直線 BG 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{BR}}=t\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ と表すことができるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BG}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(1-\frac{3t}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots①\end{aligned}$$

一方, 点 R は平面 OAC 上にあるので, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=l\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots②$ と表すことができる.

①, ② より

$$\frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(1-\frac{3t}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=l\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は線形独立なので

$$\begin{cases}\dfrac{t}{4}=l & \cdots③\\ 1-\dfrac{3t}{4}=0 & \cdots④\\ \dfrac{t}{4}=m & \cdots⑤\end{cases}$$

④ より，$\dfrac{3t}{4}=1$ であるから，$t=\dfrac{4}{3}$

これを，③，⑤ に代入して

$$l=m=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

したがって，② より

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$$

CHECK

75

$$\begin{aligned}2\vec{a}-\vec{b}&=2(-1,\ 0,\ 1)-(2,\ 1,\ 3)\\&=(-2,\ 0,\ 2)-(2,\ 1,\ 3)\\&=(-2-2,\ 0-1,\ 2-3)=\boldsymbol{(-4,\ -1,\ -1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|&=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+(-1)^2}\\&=\sqrt{16+1+1}\\&=\sqrt{18}=\boldsymbol{3\sqrt{2}}\end{aligned}$$

76

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(2,\ 1,\ 0)-(-1,\ 2,\ 1)\\&=(2-(-1),\ 1-2,\ 0-1)=\boldsymbol{(3,\ -1,\ -1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|&=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-1)^2}\\&=\sqrt{9+1+1}=\boldsymbol{\sqrt{11}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(1,\ 1,\ -1)-(-1,\ 2,\ 1)\\&=(1-(-1),\ 1-2,\ -1-1)=\boldsymbol{(2,\ -1,\ -2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|&=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\\&=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=\boldsymbol{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=(4,\ 0,\ -2)-(1,\ 1,\ -1)\\&=(4-1,\ 0-1,\ -2-(-1))=\boldsymbol{(3,\ -1,\ -1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right|&=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-1)^2}\\&=\sqrt{9+1+1}=\boldsymbol{\sqrt{11}}\end{aligned}$$

77（1）　求める座標は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{3\cdot 2+1\cdot(-1)}{1+3},\ \frac{3\cdot(-1)+1\cdot 1}{1+3},\ \frac{3\cdot 1+1\cdot 1}{1+3}\right)\\&=\left(\frac{6-1}{4},\ \frac{-3+1}{4},\ \frac{3+1}{4}\right)\\&=\boldsymbol{\left(\frac{5}{4},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)}\end{aligned}$$

（2）　求める座標は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1\cdot 2+2\cdot(-1)}{2+1},\ \frac{1\cdot(-1)+2\cdot 1}{2+1},\ \frac{1\cdot 1+2\cdot 1}{2+1}\right)\\&=\left(\frac{2-2}{3},\ \frac{-1+2}{3},\ \frac{1+2}{3}\right)\\&=\boldsymbol{\left(0,\ \frac{1}{3},\ 1\right)}\end{aligned}$$

78（1）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EC}}&=\overrightarrow{\mathrm{EA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=-\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=-\vec{e}+\vec{b}+\vec{d}\\&=\boldsymbol{\vec{b}+\vec{d}-\vec{e}}\end{aligned}$$

（2）　点 P は, 線分 EC を $1:2$ に内分する点なので, $\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{EC}}$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{EC}}\\&=\vec{e}+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d}-\vec{e})\\&=\frac{1}{3}(3\vec{e}+\vec{b}+\vec{d}-\vec{e})\\&=\boldsymbol{\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e})}\end{aligned}$$

〔別解〕

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\frac{2\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}+1\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{1+2}\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\frac{2}{3}\vec{e}+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d})\\&=\boldsymbol{\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e})}\end{aligned}$$

79　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=1\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 1\\&=1+2+0=\boldsymbol{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\\&=\frac{3}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+2^2+1^2}}\\&=\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\\&=\frac{3}{2\sqrt{3}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$　**(30°)**

80　求める単位ベクトルを $\vec{c}=(x,\ y,\ z)$ とする.

$\left|\vec{c}\right|=1$ より，$x^2+y^2+z^2=1\quad\cdots①$

$\vec{a}\perp\vec{c}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ であるから，$x+y-z=0\quad\cdots②$

$\vec{b}\perp\vec{c}$ より，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ であるから，$-x+2y+z=0\quad\cdots$③

② + ③ より，$3y=0$，すなわち，$y=0$

これを，② に代入して

$x-z=0$，すなわち，$z=x$

これらを ① に代入して

$x^2+0^2+x^2=1$

$2x^2=1$

$x^2=\dfrac{1}{2}$

$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，求める単位ベクトルは，$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

（複号同順）

81（1）　直線上の点の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$(x,\ y,\ z)=(-1,\ 1,\ -1)+t(2,\ 1,\ 3)$$
$$=(-1+2t,\ 1+t,\ -1+3t)$$

よって

$$\boldsymbol{\begin{cases}x=-1+2t\\ y=1+t\\ z=-1+3t\end{cases}}\quad (t \text{ は実数})$$

または，t を消去して

$$\boldsymbol{\frac{x+1}{2}=y-1=\frac{z+1}{3}}$$

（2）　直線上の点の座標を $(x,\ y,\ z)$ とし，$(2,\ 2,\ -1)-(1,\ -1,\ 1)=(1,\ 3,\ -2)$ を方向ベクトル，通る点を $(1,\ -1,\ 1)$ とすると

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ -1,\ 1)+t(1,\ 3,\ -2)$$
$$=(1+t,\ -1+3t,\ 1-2t)$$

よって

$$\boldsymbol{\begin{cases}x=1+t\\ y=-1+3t\\ z=1-2t\end{cases}}\quad (t \text{ は実数})$$

または，t を消去して

$$\boldsymbol{x-1=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-2}}$$

82　直線 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$ の方向ベクトルを $\vec{v_1}$ とすると

$\vec{v_1}=(2,\ -1,\ 3)$

直線 $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-1}{k}$ の方向ベクトルを $\vec{v_2}$ とすると

$\vec{v_2}=(-2,\ 4,\ k)$

$\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ が直交すればよいので，$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=0$ となればよい．

$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=2\cdot(-2)+(-1)\cdot 4+3\cdot k$$
$$=-4-4+3k$$
$$=3k-8=0$$

これより，$\boldsymbol{k=\dfrac{8}{3}}$

83（1）　平面 $2x-y+3z+1=0$ の法線ベクトルの 1 つは，$(2,\ -1,\ 3)$ であり，求める平面もこれを法線ベクトルとするので，平面上の点の座標を $\mathrm{P}\,(x,\ y,\ z)$，点 $(-1,\ 2,\ -1)$ を A，$\vec{n}=(2,\ -1,\ 3)$ とすると，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y,\ z)-(-1,\ 2,\ -1)=(x+1,\ y-2,\ z+1)$

なので

$2(x+1)-(y-2)+3(z+1)=0$

$2x+2-y+2+3z+3=0$

よって，$\boldsymbol{2x-y+3z+7=0}$

（2）　求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とおく．

与えられた 3 点を通ることから

$$\begin{cases}a-b-6c+d=0 & \cdots①\\ 2a+b-5c+d=0 & \cdots②\\ -4a+b+c+d=0 & \cdots③\end{cases}$$

① + ② より，$3a-11c+2d=0\quad\cdots$④

① + ③ より，$-3a-5c+2d=0\quad\cdots$⑤

④ + ⑤ より，$-16c+4d=0$

これより，$d=4c\quad\cdots$⑥

⑥ を ⑤ に代入して，$-3a-5c+8c=0$

これより，$a=c\quad\cdots$⑦

⑥，⑦ を ① に代入して，$c-b-6c+4c=0$

これより，$b=-c\quad\cdots$⑧

⑥，⑦，⑧ より，求める方程式は

$cx-cy+cz+4c=0\quad\cdots$⑨ となる．

ここで，$c=0$ とすると，$a=b=d=0$ となるから，$c\neq 0$ である．

⑨ の両辺を c で割って

$\boldsymbol{x-y+z+4=0}$

84　平面 $x+y-2=0$ の法線ベクトルの 1 つは，$(1,\ 1,\ 0)$

平面 $x+2y-2z+3=0$ の法線ベクトルの 1 つは，$(1,\ 2,\ -2)$

これら 2 つの法線ベクトルのなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{1\cdot1+1\cdot2+0\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$
$$=\frac{1+2}{\sqrt{1+1}\sqrt{1+4+4}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9}}$$
$$=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ より，2 平面のなす角は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$　**(45°)**

85（1）　半径を r とすると，求める球の方程式は

$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=r^2$

と表すことができる．この球が点 $(4,\ 2,\ 1)$ を通るので

$(4+1)^2+(2-1)^2+(1-2)^2=r^2$

$25+1+1=r^2$

よって，$r^2=27$

したがって，$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=27}$

（2）　中心の座標は，与えられた 2 点の中点だから

$\left(\dfrac{-2+2}{2},\ \dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{1+3}{2}\right)=(0,\ 2,\ 2)$

また，半径は，与えられた 2 点を結ぶ線分の長さの $\dfrac{1}{2}$ だから

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-2-2)^2+(-1-5)^2+(1-3)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+4}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{56}=\sqrt{14}$$

よって，$(x-0)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=(\sqrt{14})^2$

すなわち，$\boldsymbol{x^2+(y-2)^2+(z-2)^2=14}$

86　$x^2+2x+y^2-2y+z^2+6z+2=0$

$(x+1)^2-1+(y-1)^2-1+(z+3)^2-9+2=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$

$(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=3^2$

よって，中心は，$(\mathbf{-1,\ 1,\ -3})$，半径は，$\mathbf{3}$

87　交点 Q は直線 CP 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と表すことができるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{6}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\frac{t}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(1-\frac{2}{3}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots①\end{aligned}$$

一方, 点 Q は平面 OAB 上にあるので, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=l\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots②$ と表すことができる.

①, ② より

$$\frac{t}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(1-\frac{2}{3}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=l\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は線形独立なので

$$\begin{cases}\dfrac{t}{6}=l & \cdots③\\ \dfrac{t}{6}=m & \cdots④\\ 1-\dfrac{2}{3}t=0 & \cdots⑤\end{cases}$$

⑤ より，$\dfrac{2}{3}t=1$ であるから，$t=\dfrac{3}{2}$

これを，③, ④ に代入して

$$l=m=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

したがって，② より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\mathbf{\frac{1}{4}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\mathbf{\frac{1}{4}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

STEP UP

88（1）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}\\&=\boldsymbol{\vec{b}+\vec{d}+\vec{p}}\end{aligned}$$

（2）

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{p}}{3}$$

これと（1）より，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=3\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

よって，$\mathrm{AG}:\mathrm{GR}=1:2$

89（1）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(6,\ 2,\ 5)-(2,\ 3,\ 4)\\&=(4,\ -1,\ 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(1,\ 7,\ 3)-(2,\ 3,\ 4)\\&=(-1,\ 4,\ -1)\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=4\cdot(-1)+(-1)\cdot4+1\cdot(-1)\\&=-4-4-1=-9\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を θ とすれば

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\\&=\frac{-9}{\sqrt{4^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}}\\&=\frac{-9}{\sqrt{18}\sqrt{18}}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

これより，$\theta=\mathbf{\dfrac{2}{3}\pi}$

（2）

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\frac{2}{3}\pi\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{18}\sqrt{18}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\mathbf{\frac{9\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

90（1）　直線 AB は，点 A $(1,\ -2,\ -1)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとする直線である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(-2,\ -5,\ 0)-(1,\ -2,\ -1)\\&=(-3,\ -3,\ 1)\end{aligned}$$

したがって，媒介変数を t とすれば，直線の方程式は

$$\begin{cases}x=1-3t\\y=-2-3t\\z=-1+t\end{cases}$$

yz 平面の方程式は，$x=0$ であるから，これを $x=1-3t$ に代入して

$$0=1-3t$$

これより，$t=\dfrac{1}{3}$

よって，

$$\begin{aligned}y&=-2-3+\cdot\frac{1}{3}\\&=-2-1=-3\end{aligned}$$

$$z=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

以上より，交点の座標は，$\left(\mathbf{0,\ -3,\ -\frac{2}{3}}\right)$

（2）　3 点 A, B, C を通る平面の方程式を，$ax+by+cz+d=0$ とおく．

これが 3 点を通ることから

$$\begin{cases}a-2b-c+d=0 & \cdots①\\-2a-5b+d=0 & \cdots②\\2a+b+d=0 & \cdots③\end{cases}$$

② + ③ より，$-4b+2d=0$ なので，$b=\dfrac{1}{2}d\cdots④$

これを ③ に代入して，$2a+\dfrac{1}{2}d+d=0$

これより，$a=-\dfrac{3}{4}d\cdots⑤$

④, ⑤ を ① に代入して

$$-\frac{3}{4}d-d-c+d=0$$

これより，$c=-\dfrac{3}{4}d$

以上より，平面の方程式は

$$-\frac{3}{4}dx+\frac{1}{2}dy-\frac{3}{4}dz+d=0$$

$d\fallingdotseq 0$ より，$3x-2y+3z-4=0$

この平面と x 軸との交点の x 座標は，$y=0,\ z=0$ を代入して

$$3x-4=0,\ \text{すなわち},\ x=\frac{4}{3}$$

よって，求める交点の座標は，$\left(\mathbf{\frac{4}{3},\ 0,\ 0}\right)$

（3）

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|&=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2+0}\\&=\sqrt{29}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|&=\sqrt{2^2+1^2+0}\\&=\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=-2\cdot2+(-5)\cdot1+0\\&=-4-5=-9\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角を θ とすれば

$$\cos\theta = \frac{-9}{\sqrt{29}\sqrt{5}}$$
$$= -\frac{9}{\sqrt{145}}$$

これより

$$\sin\theta = \sqrt{1-\left(-\frac{9}{\sqrt{145}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{64}{145}} = \frac{8}{\sqrt{145}}$$

よって

$$\triangle\mathrm{OBC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\sqrt{5}\cdot\frac{8}{\sqrt{145}}$$
$$= \mathbf{4}$$

〔別解〕

$$\triangle\mathrm{OBC} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{29})^2\cdot(\sqrt{5})^2-(-9)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{29\cdot 5-81}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{145-81}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{64} = \frac{1}{2}\cdot 8 = \mathbf{4}$$

（4）　O，B，C は xy 平面上の点なので，$\triangle$OBC を底面とすれば，四面体 OABC の高さは，点 A の z 座標の絶対値となる．

よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OBC}\cdot|-1| = \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

91　直線の方程式は，媒介変数を t として

$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = -4-t \quad \cdots ① \\ z = 2 \end{cases}$$

と表される．

また，球の方程式は

$$(x-5)^2+(y+6)^2+(z-4)^2 = 6^2$$

これに ① を代入して解くと

$$(3+t-5)^2+(-4-t+6)^2+2^2 = 36$$
$$(t-2)^2+(-t+2)^2+4 = 36$$
$$t^2-4t+4+t^2-4t+4+4 = 36$$
$$2t^2-8t-24 = 0$$
$$t^2-4t-12 = 0$$
$$(t+2)(t-6) = 0$$

よって，$t=-2,\ 6$

$t=-2$ のとき

$x = 3+(-2) = 1$

$y = -4-(-2) = -2$

$z = 2$

$t=6$ のとき

$x = 3+6 = 9$

$y = -4-6 = -10$

$z = 2$

したがって直線と球の交点の座標は

$\mathbf{(1,\ -2,\ 2),\ (9,\ -10,\ 2)}$

92　直線の方向ベクトルは，$(1,\ 3,\ 4)-(1,\ -2,\ 5) = (0,\ 5,\ -1)$ であるから，媒介変数を t として，点 $(1,\ -2,\ 5)$ を通る直線の求めると

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2+5t \\ z = 5-t \end{cases}$$

$y,\ z$ から，t を消去して，$\dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-5}{-1}$

よって，直線の方程式は，$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-5}{-1}}$

〔別解〕

通る点の座標を $(1,\ 3,\ 4)$ とすれば，$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-4}{-1}}$

93（1）　2 式より

$$\begin{cases} x+2y = z+4 & \cdots ① \\ x-y = -2z+4 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より，$3y = 3z$

よって，$y = z$

① + ② × 2 より，$3x = -3z+12$

よって，$x = -z+4$，これより，$z = -x+4$

以上より，交線の方程式は，$\boldsymbol{-x+4 = y = z}$

（2）　まず，交線上にある 2 点を求める．

$-x+4 = y = z$ において，例えば $z=0$ とすれば，$y=0$，また，$-x+4=0$ より，$x=4$

よって，点 $(4,\ 0,\ 0)$ は交線上の点である．

同様に，$z=1$ とすれば，$y=1$，また，$-x+4=1$ より，$x=3$

よって，点 $(3,\ 1,\ 1)$ は交線上の点である．

この 2 点と点 $(0,\ 1,\ 0)$ を通る平面を求めればよい．

求める方程式を，$ax+by+cz+d=0$ とおく．

これが 3 点を通ることから

$$\begin{cases} 4a+d = 0 & \cdots ① \\ 3a+b+c+d = 0 & \cdots ② \\ b+d = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①，③ より，$a = -\dfrac{1}{4}d,\ b = -d$

これらを ② に代入して，$-\dfrac{3}{4}d-d+c+d = 0$

これより，$c = \dfrac{3}{4}d \cdots ⑤$

以上より，平面の方程式は

$$-\frac{1}{4}dx-dy+\frac{3}{4}dz+d = 0$$

$d \fallingdotseq 0$ より，平面の方程式は，$\boldsymbol{x+4y-3z-4 = 0}$

94（1）

$$(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2 = \left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2$$
$$= |\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2 - \left(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)$$
$$= 2\left(|\vec{a}||\vec{b}|-\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b} \leqq |\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b} \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$

すなわち，$|\vec{a}||\vec{b}|-\vec{a}\cdot\vec{b} \geqq 0$ なので，$2\left(|\vec{a}||\vec{b}|-\vec{a}\cdot\vec{b}\right) \geqq 0$

よって，$\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)^2 \geqq |\vec{a}+\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|+|\vec{b}| \geqq 0,\ |\vec{a}+\vec{b}| \geqq 0$ なので，$|\vec{a}|+|\vec{b}| \geqq |\vec{a}+\vec{b}|$

（2）

$$(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2-\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|^2$$
$$= |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 - \left(|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2\right)$$
$$= 2\left(|\vec{a}||\vec{b}|-\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

ここで，（1）と同様に，$|\vec{a}||\vec{b}| - \vec{a}\cdot\vec{b} \geqq 0$ なので，
$2\left(|\vec{a}||\vec{b}| - \vec{a}\cdot\vec{b}\right) \geqq 0$

よって，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 \geqq \left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|^2$

$|\vec{a}-\vec{b}| \geqq 0$, $\left||\vec{a}|+|\vec{b}|\right| \geqq 0$ なので，$|\vec{a}-\vec{b}| \geqq \left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$

95（1）　G は △ABC の重心だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \boldsymbol{\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}}$$

（2）　点 P は直線 OG 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とおくことができる．

これより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= k\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\\ &= \frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots①\end{aligned}$$

一方，P は △DEF 上の点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = l\overrightarrow{\mathrm{OD}}+m\overrightarrow{\mathrm{OE}}+n\overrightarrow{\mathrm{OF}} \qquad (l+m+n=1)$$

と表すことができる．

ここで，題意より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= l\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= \frac{l}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2m}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2n}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots②\end{aligned}$$

①, ② より

$$\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{l}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2m}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2n}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は線形独立であるから

$$\begin{cases}\dfrac{k}{3} = \dfrac{l}{3}\\ \dfrac{k}{3} = \dfrac{2m}{3}\\ \dfrac{k}{3} = \dfrac{2n}{3}\end{cases}$$

これより，$l = k$, $m = \dfrac{1}{2}k$, $n = \dfrac{1}{2}k$ なので，これらを $l+m+n=1$ に代入すると

$k+\dfrac{1}{2}k+\dfrac{1}{2}k = 1$

$2k = 1$ より，$k = \dfrac{1}{2}$

これを ① に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OG}}\end{aligned}$$

よって，OP : PG = **1 : 1**

■