BASIC

141（1）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x + \dfrac{3}{2}y = \dfrac{1}{2} & \cdots ① \\ \qquad\quad y = -2 & \cdots ② \end{cases}$$

② の $y=-2$ を ① に代入すると

$x - 3 = \dfrac{1}{2}$ より，$x = \dfrac{7}{2}$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y) = \left(\dfrac{7}{2},\ -2\right)}$

（2）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & -8 & 5 \\ -11 & 12 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{8}{7} & \frac{5}{7} \\ -11 & 12 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{8}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & -\frac{4}{7} & \frac{76}{7} \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x - \dfrac{8}{7}y = \dfrac{5}{7} & \cdots ① \\ \ \ -\dfrac{4}{7}y = \dfrac{76}{7} & \cdots ② \end{cases}$$

② より，$y = -19$

これを ① に代入すると

$x - \dfrac{8}{7}\cdot(-19) = \dfrac{5}{7}$

これより，$x = \dfrac{5}{7} - \dfrac{152}{7} = -\dfrac{147}{7} = -21$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y) = (-21,\ -19)}$

（3）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 2 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \\ -3 & -6 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x + y - z &= 2 \quad \cdots ① \\ \quad\ y - 3z &= -3 \quad \cdots ② \\ \qquad\quad z &= 1 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

③ の $z=1$ を ② に代入して

$y - 3 = -3$ より，$y = 0$

$z = 1,\ y = 0$ を ① に代入して

$x + 0 - 1 = 2$ より，$x = 3$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (3,\ 0,\ 1)}$

（4）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \quad \cdots ① \\ 2y - 3z &= 1 \quad \cdots ② \\ 0x + 0y + 0z &= -2 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

③ は，どのような $x,\ y,\ z$ に対しても成り立たない．したがってこの連立方程式の**解はない．**

（5）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & -1 \\ -5 & 0 & -10 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -3 \\ 0 & 10 & -20 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x + 2y - 2z &= 1 \quad \cdots ① \\ -5y + 10z &= -3 \quad \cdots ② \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

③ はどのような $x,\ y,\ z$ に対しても成り立つから，これを省略して

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 & \cdots ① \\ \ \ -5y + 10z = -3 & \cdots ② \end{cases}$$

② において，$z = t$ とおくと，$-5y + 10t = -3$

これより，$5y = 10t + 3$，すなわち，$y = 2t + \dfrac{3}{5}$

$z = t,\ y = 2t + \dfrac{3}{5}$ を ① に代入して

$x + 2\left(2t + \dfrac{3}{5}\right) - 2t = 1$

これより，$x = 1 - 4t - \dfrac{6}{5} + 2t = -2t - \dfrac{1}{5}$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = \left(-2t - \dfrac{1}{5},\ 2t + \dfrac{3}{5},\ t\right)}$

(t は任意の数)

（6）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \quad \cdots ① \\ z &= 0 \quad \cdots ② \\ 2y + z &= 0 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

② の $z=0$ を ③ に代入して

$2y+0=0$，これより，$y=0$

$y=0,\ z=0$ を ① に代入して

$x+0-0=0$

これより，$x=0$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)}$

142（1）

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

よって，逆行列は，$\boldsymbol{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

（2）

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

よって，逆行列は，$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

（3）

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

よって，逆行列は，$\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$

143（1）　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，与えられた方程式は，$A\vec{x}=\vec{b}$，すなわち

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

と表すことができる．

ここで，**142** の（2）より，$A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot 0 \\ (-2)\cdot(-1)+1\cdot 1+0\cdot 0 \\ 1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -4-1 \\ 2+1 \\ -1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

したがって，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}) = (\mathbf{-5},\ \mathbf{3},\ \mathbf{-2})$

（2）　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおく

と，与えられた方程式は，$A\vec{x} = \vec{b}$，すなわち

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

と表すことができる．

ここで，**142** の（3）より，$A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ であるから

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 1\cdot(-2) \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+0+2 \\ 2+0-2 \\ 2+0-6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

したがって，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}) = (\mathbf{2},\ \mathbf{0},\ \mathbf{-2})$

144　それぞれの行列を A として，消去法を行う．

（1）
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{rank}\boldsymbol{A} = \mathbf{2}$

（2）
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{rank}\boldsymbol{A} = \mathbf{3}$

145　それぞれの 3 次正方行列を A として，消去法を行う．

（1）
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank}A = 3$ であるから，A は**正則である．**

（2）
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank}A = 2 < 3$ であるから，A は**正則ではない．**

CHECK

146（1）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x - 2y = -1 & \cdots ① \\ 0x + 0y = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② はどのような x，y に対しても成り立つから，これを省略して

$x - 2y = -1$

$y = t$ とおけば，$x - 2t = -1$ より，$x = 2t - 1$

よって，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\mathbf{2}\boldsymbol{t} - \mathbf{1},\ \boldsymbol{t})$　(**$\boldsymbol{t}$ は任意の数**)

（2）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 8 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & -40 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 & \cdots ① \\ y - 9z = -1 & \cdots ② \\ 5z = 1 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ より，$z = \dfrac{1}{5}$

これを ② に代入すると

$y - \dfrac{9}{5} = -1$ より，$y = -1 + \dfrac{9}{5} = \dfrac{4}{5}$

$z = \dfrac{1}{5}$，$y = \dfrac{4}{5}$ を ① に代入すると

$x + \dfrac{8}{5} + \dfrac{3}{5} = 1$ より，$x = 1 - \dfrac{8}{5} - \dfrac{3}{5} = -\dfrac{6}{5}$

よって，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}) = \left(\mathbf{-\dfrac{6}{5}},\ \mathbf{\dfrac{4}{5}},\ \mathbf{\dfrac{1}{5}}\right)$

147（1）

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

よって，逆行列は，$\boldsymbol{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$

（2）

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

よって，逆行列は，$\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}}$

（3）

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

よって，逆行列は，$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

148（1）　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

与えられた方程式は，$A\vec{x} = \vec{b}$，すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．

ここで，**146** の（2）より，$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ であるから

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2+0-4 \\ 2-1+5 \\ -2+1-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-3,\ 3,\ -2)}$

（2）　$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと，与えられた方程式は，$A\vec{x} = \vec{b}$，すなわち

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．

ここで，**142** の（3）より，$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\frac{3}{2}&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ であるから

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\frac{3}{2}&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0+1-1\\0+\frac{3}{2}-1\\0+1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=\left(0,\ \frac{1}{2},\ -1\right)}$

149　それぞれの行列を A として，消去法を行う．

（1）
$$\begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&2&1\\3&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&-2\\3&-1&2\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-2&-1\\2&1&-2\\3&-1&2\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&5&0\\0&5&5\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

よって，$\boldsymbol{\mathrm{rank}A=3}$

（2）
$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-2\\4&-9&10&-5\\2&1&13&-13\\8&-13&18&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-2\\0&-1&-2&3\\0&5&7&-9\\0&3&-6&15\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-2\\0&1&2&-3\\0&5&7&-9\\0&3&-6&15\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&-3&6\\0&0&-12&24\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&-3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$\boldsymbol{\mathrm{rank}A=3}$

150　それぞれの 3 次正方行列を A として，消去法を行う．

（1）
$$\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&3\\4&1&22\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&3\\0&9&22\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&3\\0&0&-5\end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank}A=3$ であるから，A は**正則である．**

（2）
$$\begin{pmatrix}1&0&2\\3&2&4\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank}A=2<3$ であるから，A は**正則ではない．**

STEP UP

151　$A^2=E$ より，$AA=E$ であるから，$A^{-1}=A$

方程式を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b+d\\-2a-c\end{pmatrix}$$

すなわち，$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b+d\\-2a-c\end{pmatrix}$ であるから，この両辺に左から A^{-1} をかけると

$$A^{-1}A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}2b+d\\-2a-c\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2b+d\\-2a-c\end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2b+d\\-2a-c\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a(2b+d)+b(-2a-c)\\c(2b+d)+d(-2a-c)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2ab+ad-2ab-bc\\2bc+cd-2ad-cd\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}ad-bc\\-2(ad-bc)\end{pmatrix}$$

ここで，$ad-bc=-1$ であるから，$\begin{pmatrix}ad-bc\\-2(ad-bc)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y)=(-1,\ 2)}$

152　それぞれの行列を A とする．

（1）
$$\begin{pmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&x&x\\x-1&1-x&0\\x-1&0&1-x\end{pmatrix}$$

i) $x=1$ のとき

$$\begin{pmatrix}1&x&x\\x-1&1-x&0\\x-1&0&1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，このとき，$\mathrm{rank}A=1$

ii) $x\fallingdotseq 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x-1 & 1-x & 0 \\ x-1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & x & x \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & x & x+1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2x+1 \end{pmatrix}$$

ここで, $2x+1=0$, すなわち, $x=-\dfrac{1}{2}$ のとき, $\mathrm{rank}A=2$

$2x+1 \fallingdotseq 0$, すなわち, $x \fallingdotseq -\dfrac{1}{2}$ のとき, $\mathrm{rank}A=3$

以上より

$$\mathbf{rank}\boldsymbol{A}=\begin{cases} \mathbf{3} & \left(\boldsymbol{x \fallingdotseq 1} \text{ **かつ** } \boldsymbol{x \fallingdotseq -\frac{1}{2}} \text{ **のとき**}\right) \\ \mathbf{2} & \left(\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}} \text{ **のとき**}\right) \\ \mathbf{1} & (\boldsymbol{x=1} \text{ **のとき**}) \end{cases}$$

（2） $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix}$

i）$a=b=c$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，このとき，$\mathrm{rank}A=1$

ii）$a=b$ $(b \fallingdotseq c,\ c \fallingdotseq a)$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c+a \end{pmatrix}$$

よって，このとき，$\mathrm{rank}A=2$

iii）$c=a$ $(a \fallingdotseq b,\ b \fallingdotseq c)$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，このとき，$\mathrm{rank}A=2$

iv）$b=c$ $(a \fallingdotseq b,\ c \fallingdotseq a)$ のとき

$c=b$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & b+a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，このとき，$\mathrm{rank}A=2$

v）$a \fallingdotseq b,\ b \fallingdotseq c,\ c \fallingdotseq a$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix}$$

よって，このとき，$\mathrm{rank}A=3$

以上より

$$\mathbf{rank}\boldsymbol{A}=\begin{cases} \mathbf{3} & (\boldsymbol{a,b,c} \text{ **がすべて異なるとき**}) \\ \mathbf{2} & (\boldsymbol{a,b,c} \text{ **のうち，2 つが等しいとき**}) \\ \mathbf{1} & (\boldsymbol{a=b=c} \text{ **のとき**}) \end{cases}$$

153　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & k \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \quad 3\text{行}-2\text{行}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & k \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & k-4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & k-10 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x+y+z & = & 4 & \cdots ① \\ -y+z & = & -3 & \cdots ② \\ 0x+0y+0z & = & 10-k & \cdots ③ \end{cases}$$

$10-k \fallingdotseq 0$ のとき，③ はどのような $x,\ y,\ z$ に対しても成り立たない．

$10-k=0$ のとき，③ はどのような $x,\ y,\ z$ に対しても成り立つから，省略してよく，解は無数にある．よって，解をもつための条件は，$\boldsymbol{k=10}$

このとき，方程式は

$$\begin{cases} x+y+z=4 & \cdots ① \\ -y+z=-3 & \cdots ② \end{cases}$$

となる．

$z=t$ とおくと，② より，$y=z+3=t+3$

これらを ① に代入すると，$x+(t+3)+t=4$ であるから

$x=4-(2t+3)=-2t+1$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(-2t+1,\ t+4,\ t)}$ (t は任意の数)

154　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 4 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -2 & t+3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & t+3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x+2y=-1 & \cdots ① \\ y=-2 & \cdots ② \\ 0x+0y=t-1 & \cdots ③ \end{cases}$$

$t-1 \fallingdotseq 0$ のとき，③ はどのような $x,\ y$ に対しても成り立たない．

$t-1=0$ のとき，③ はどのような $x,\ y$ に対しても成り立つので省略してよいから，解をもつための条件は，$\boldsymbol{t=1}$

このとき，方程式は

$$\begin{cases} x+2y=-1 & \cdots ① \\ y=-2 & \cdots ② \end{cases}$$

となるから，これを解いて，$\boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ -2)}$

155

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ -6 & 3 & -1 & 10 & 7 \\ -8 & 4 & -2 & 12 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3 行と 4 行に関する方程式は，どのような $x,\ y,\ z,\ w$ についても成り立つので，これらを省略して方程式にもどすと

$$\begin{cases} 2x-y+z-2w=-1 & \cdots ① \\ z+2w=2 & \cdots ② \end{cases}$$

$w=t$ とおくと，② より，$z=2-2w=2-2t$

これらを ① に代入して

$2x-y+(2-2t)-2t=-1$

$2x-y=4t-3$

$y=s$ とおくと，$2x-s=4t-3$ であるから

$x=\dfrac{s}{2}+2t-\dfrac{3}{2}$

以上より

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z,\ w)=\left(\frac{s}{2}+2t-\frac{3}{2},\ s,\ 2-2t,\ t\right)}$$

($s,\ t$ は任意の数)

〔別解〕

$2x-y=4t-3$ において，$x=s$ とおけば，$2s-y=4t-3$ であるから

$y=2s-4t+3$

このとき，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z,\ w)=(s,\ 2s-4t+3,\ 2-2t,\ t)}$

■