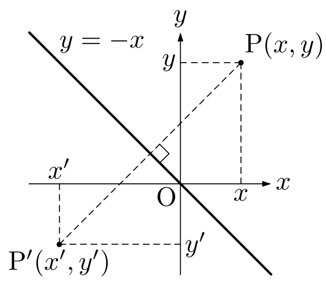
4章　行列の応用

BASIC

218



$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = -y} \\ \boldsymbol{y' = -x} \end{cases}$$

219　(1) は，x' を表す式に定数項があるので，線形変換ではない．
(3) は，y' を表す式に 2 次の項があるので，線形変換ではない．
(2) が線形変換であり，変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$

220 (1)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{5} \end{pmatrix}$

また，点 $(3,\ -1)$ の像の座標は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，$\boldsymbol{(4,\ 1)}$

(2)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ 2x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}$

また，点 $(3,\ -1)$ の像の座標は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 \\ 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

よって，$\boldsymbol{(3,\ 7)}$

221　$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ より，

$$A\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

である．ここで，

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-4 = -6 \fallingdotseq 0$$

であるから，$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ は正則で，$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-6}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

よって，

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5-1 & -20+2 \\ -9-3 & -36+6 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -18 \\ -12 & -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

222　題意より，$f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(1)

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) &= f(\boldsymbol{p}) + f(\boldsymbol{q}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) &= f(\boldsymbol{p}) - f(\boldsymbol{q}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f(3\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}) &= f(3\boldsymbol{p}) + f(2\boldsymbol{q}) \\ &= 3f(\boldsymbol{p}) + 2f(\boldsymbol{q}) \\ &= 3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{19} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

223　題意より，$f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

ここで，$\boldsymbol{c} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$ とおくと，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} &= m\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2m+n \\ m+3n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，$\begin{cases} 2m+n = 4 \\ m+3n = -3 \end{cases}$

これを解いて，$m = 3,\ n = -2$

よって，$\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ であるから

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{c}) &= f(3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) \\ &= 3f(\boldsymbol{a}) - 2f(\boldsymbol{b}) \\ &= 3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-7} \\ \boldsymbol{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

224（1）　直線 $y=2x+3$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ 2x+3)$ の線形変換による像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 2x+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+3(2x+3) \\ x+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8x+9 \\ x \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} x'=8x+9 & \cdots ① \\ y'=x & \cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して

$x'=8y'+9$

したがって，求める図形は，直線 $\boldsymbol{x-8y=9}$

（2）　$3x-2y=6$ より，$y=\dfrac{3}{2}x-3$

この直線上の任意の点 $\mathrm{P}\left(x,\ \dfrac{3}{2}x-3\right)$ の線形変換による像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+4(\frac{3}{2}x-3) \\ x+2(\frac{3}{2}x-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8x-12 \\ 4x-6 \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} x'=8x-12 & \cdots ① \\ y'=4x-6 & \cdots ② \end{cases}$

①より，$x=\dfrac{x'+12}{8}$

②に代入して

$y'=\dfrac{4(x'+12)}{8}-6$

$8y'=4(x'+12)-48$

$2y'=(x'+12)-12$

整理すると，$x'-2y'=0$

したがって，求める図形は，直線 $\boldsymbol{x-2y=0}$

（3）　直線上の任意の点 $\mathrm{P}(3-t,\ 2+3t)$ の線形変換による像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-t \\ 2+3t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (3-t)+2(2+3t) \\ -3(3-t)+(2+3t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7+5t \\ -7+6t \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} x'=7+5t \\ y'=-7+6t \end{cases}$

したがって，求める図形は，

直線 $\boldsymbol{x=7+5t,\ \ y=-7+6t}$　(t は媒介変数)

または，t を消去して

$\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y+7}{6}$ より，$6(x-7)=5(y+7)$

すなわち，直線 $\boldsymbol{6x-5y=77}$

（4）　直線上の任意の点 $\mathrm{P}(2+t,\ 1+3t)$ の線形変換による像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+t \\ 1+3t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3(2+t)+(1+3t) \\ 6(2+t)-2(1+3t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} x'=-5 \\ y'=10 \end{cases}$

したがって，求める図形は，点 $\boldsymbol{(-5,\ 10)}$

225 $f\circ g$ を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-8 & 1+2 \\ 9+16 & 3-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{25} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}$$

また，$f\circ g$ による点 $\mathrm{P}(1,\ -1)$ の像は

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 25 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5-3 \\ 25+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ 26 \end{pmatrix}$$

これより，$\boldsymbol{(-8,\ 26)}$

$g\circ f$ を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+3 & -6+4 \\ 4-3 & -8-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{6} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-12} \end{pmatrix}$$

また，$g\circ f$ による点 $\mathrm{P}(1,\ -1)$ の像は

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6+2 \\ 1+12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

これより，$\boldsymbol{(8,\ 13)}$

226（1）逆変換 f^{-1} を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5-6}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}$$

（2）点 $(2,\ -1)$ に移されるもとの点の座標は

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10-2 \\ 6+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

よって，点 $\boldsymbol{(-12,\ 7)}$

227（1） f^{-1} を表す行列は

$$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6-5}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{-5}\\\mathbf{-1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}\cdots①$$

g^{-1} を表す行列は

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{0+1}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\cdots②$$

$$f\circ g=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2\\3&-1\end{pmatrix}$$

であるから，$(f\circ g)^{-1}$ を表す行列は

$$\begin{pmatrix}5&-2\\3&-1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-5+6}\begin{pmatrix}-1&2\\-3&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{2}\\\mathbf{-3}&\mathbf{5}\end{pmatrix}\cdots③$$

①，② より，$f^{-1}\circ g^{-1}$ を表す行列は

$$\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}&\mathbf{3}\\\mathbf{-2}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}\cdots④$$

（2） f によって，点 $(1,\ 1)$ に移されるもとの点の座標は，① より

$$\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-5\\-1+2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

よって，点 $\boldsymbol{(-2,\ 1)}$

g によって，点 $(1,\ 1)$ に移されるもとの点の座標は，② より

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1\\-1+0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

よって，点 $\boldsymbol{(1,\ -1)}$

$f\circ g$ によって，点 $(1,\ 1)$ に移されるもとの点の座標は，③ より

$$\begin{pmatrix}-1&2\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2\\-3+5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

よって，点 $\boldsymbol{(1,\ 2)}$

$f\circ g$ によって，点 $(1,\ 1)$ に移されるもとの点の座標は，③ より

$$\begin{pmatrix}-1&2\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2\\-3+5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

よって，点 $\boldsymbol{(1,\ 2)}$

$$g\circ f=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-3\\2&5\end{pmatrix}$$

であるから，$(g\circ f)^{-1}$ を表す行列は

$$\begin{pmatrix}-1&-3\\2&5\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-5+6}\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}$$

したがって，$g\circ f$ によって，点 $(1,\ 1)$ に移されるもとの点の座標は

$$\begin{pmatrix}5&3\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+3\\-2-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$$

よって，点 $\boldsymbol{(8,\ -3)}$

※ 変換 $f,\ g$ を表す行列をそれぞれ $A,\ B$ とすると，変換 $g\circ f$ を表す行列は，BA となる．これより，$(g\circ f)^{-1}$ を表す行列は

$$(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$$

となり，これは，変換 $f^{-1}\circ g^{-1}$ を表す行列となっている．
よって，④ は，$(g\circ f)^{-1}$ を表す行列である．

228 f の逆変換 f^{-1} を表す行列は

$$\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6-4}\begin{pmatrix}2&-1\\-4&3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1\\-4&3\end{pmatrix}$$

直線 $y=x+2$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ x+2)$ のもとの座標を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とすると

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1\\-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\x+2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2x-(x+2)\\-4x+3(x+2)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-2\\-x+6\end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}(x-2) & \cdots①\\ y'=\dfrac{1}{2}(-x+6) & \cdots②\end{cases}$

①より，$x=2x'+2$ であるから，これを②に代入して

$$y'=\frac{1}{2}\{-(2x'+2)+6\}=-x'+2$$

したがって，求める図形は，直線 $\boldsymbol{y=-x+2}$

229　座標平面上の点を原点のまわりに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させる変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

であるから，

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-2\sqrt{3}\\ \sqrt{3}+2\end{pmatrix}$$

よって，$\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}-\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}+1}\right)$

230　空間内の点を z 軸のまわりに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させる変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

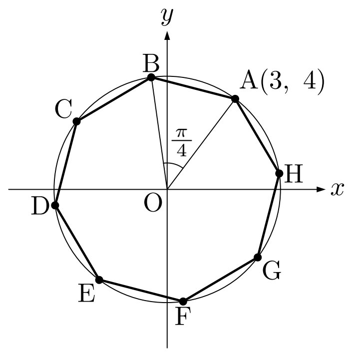
であるから，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2-3+0\\ 2+3+0\\ 0+0+\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 5\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

よって，$\left(\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{5}{\sqrt{2}},\ 1}\right)$

231　$2\pi\div 8=\frac{\pi}{4}$ より，正八角形の各頂点は，点 A を原点のまわりに順次 $\frac{\pi}{4}$ ずつ回転させた点となる．



図のように頂点を定める．座標平面上の点を原点のまわりに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させる変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

であるから，点 B の座標は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3-4\\3+4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{B}\left(\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{7}{\sqrt{2}}}\right)$

点 C の座標は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1-7\\-1+7\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{C(-4,\ 3)}$

点 D の座標は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-4-3\\-4+3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{D}\left(\boldsymbol{-\frac{7}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$

点 E の座標は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-7+1\\-7-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{E(-3,\ -4)}$

点 F の座標は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-3+4\\-3-4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{F}\left(\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{7}{\sqrt{2}}}\right)$

点 G の座標は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+7\\1-7\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{G(4,\ -3)}$

点 H の座標は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4+3\\4-3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\frac{7}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$

232（1）　与えられた行列の列ベクトルを $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ とおく。すなわち

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

このとき

$|\boldsymbol{a}|^2 = 0^2 + 1^2 = 1$

$|\boldsymbol{b}|^2 = (-1)^2 + 0^2 = 1$

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0$

よって，与えられた行列は直交行列である。

（2）　与えられた行列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とおく。すなわち

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

このとき

$|\boldsymbol{a}|^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1$

$|\boldsymbol{b}|^2 = (-1)^2 + 0^2 = 1$

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = 0$

よって，与えられた行列は直交行列である。

（3）　与えられた行列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とおく。すなわち

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

このとき

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}|^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ |\boldsymbol{b}|^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

よって，与えられた行列は直交行列ではない.

（4）　与えられた行列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とおく。すなわち

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

このとき

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}|^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ |\boldsymbol{b}|^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

よって，与えられた行列は直交行列である.

（5）　与えられた行列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ とおく。すなわち

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

このとき

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}|^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 \\ |\boldsymbol{b}|^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 \\ |\boldsymbol{c}|^2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0 \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \\ \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \end{aligned}$$

よって，与えられた行列は直交行列である。

（6）　与えられた行列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ とおく。すなわち

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

このとき

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}|^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 (2^2 + 1^2 + 2^2) \\ &= \frac{1}{9}(4+1+4) = \frac{1}{9} \cdot 9 = 1 \\ |\boldsymbol{b}|^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \{1^2 + 2^2 + (-2)^2\} \\ &= \frac{1}{9}(1+4+4) = \frac{1}{9} \cdot 9 = 1 \\ |\boldsymbol{c}|^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2\} \\ &= \frac{1}{9}(4+4+1) = \frac{1}{9} \cdot 9 = 1 \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2)\} \\ &= \frac{1}{9}(2+2-4) = 0 \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1)\} \\ &= \frac{1}{9}(2-4+2) = 0 \\ \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\{2 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 2\} \\ &= \frac{1}{9}(4-2-2) = 0 \end{aligned}$$

よって，与えられた行列は直交行列である。

以上より，直交行列は，**（1），（2），（4），（5），（6）**

CHECK

233（1）
$$\begin{pmatrix} 3y \\ y-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x+3y \\ -2x+y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
よって，求める行列は，$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

（2）　求める行列を A とすると，題意より
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
よって，$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ である．

ここで，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-2) = 3 \fallingdotseq 0$

であるから，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ は正則で，
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
よって，
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+1 & -4+1 \\ 3+0 & -6+0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

234（1）$g \circ f$ を表す行列は
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-8 & 0-2 \\ -2+12 & 0+3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$
よって，$g \circ f$ による点 $\mathrm{P}(3,\ 2)$ の像は
$$\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18-4 \\ 30+6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -22 \\ 36 \end{pmatrix}$$
これより，$\boldsymbol{(-22,\ 36)}$

（2）$f \circ g$ を表す行列は
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & -4+0 \\ 4-1 & -8+3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$
これより，$(f \circ g)^{-1}$ を表す行列は
$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-10-(-12)}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$
よって，$(f \circ g)^{-1}$ による点 $\mathrm{P}(3,\ 2)$ の像は
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -15+8 \\ -9+4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$
これより，$\boldsymbol{\left(-\frac{7}{2},\ -\frac{5}{2}\right)}$

235　点 $(x,\ y)$ の f による像を $(x',\ y')$ とすると
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots ①$$
（1）① より，
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6-2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x'-y' \\ -2x'+2y' \end{pmatrix}$$
よって，$x = \frac{1}{4}(3x'-y'),\quad y = \frac{1}{4}(-2x'+2y')$

ここで，$(x,\ y)$ は，直線 $y = 3x+2$ 上の点であるから
$$\frac{1}{4}(-2x'+2y') = 3 \cdot \frac{1}{4}(3x'-y')+2$$
$$-2x'+2y' = 3(3x'-y')+8$$
$$-2x'+2y' = 9x'-3y'+8$$
$$11x'-5y'+8 = 0$$
したがって，求める像は，直線 $\boldsymbol{11x-5y+8=0}$

（2）　点 $(t,\ 3t+2)$ の f による像は
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 3t+2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2t+(3t+2) \\ 2t+3(3t+2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5t+2 \\ 11t+6 \end{pmatrix}$$
よって，$x' = 5t+2,\quad y' = 11t+6$

t を消去すると
$$\frac{x'-2}{5} = \frac{y'-6}{11}$$
$$11(x'-2) = 5(y'-6)$$
$$11x'-22 = 5y'-30$$
$$11x'-5y'+8 = 0$$
したがって，求める像は，直線 $\boldsymbol{11x-5y+8=0}$

※ 以後，逆行列を求める必要のある行列について，正則であることを一々示さずに，直接求めます．

236（1）　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，題意より
$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって，$A\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2\\3&3\end{pmatrix}$ である．

したがって

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}-2&-2\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}-2&-2\\3&3\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{0-3}\begin{pmatrix}0&-3\\-1&2\end{pmatrix}\right\}\\&=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-2\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-3\\-1&2\end{pmatrix}\\&=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0+2&6-4\\0-3&-9+6\end{pmatrix}\\&=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2\\-3&-3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a=-\frac{2}{3},\ b=-\frac{2}{3},\ c=1,\ d=1}$

（2）　与えられた直線上の点は，$(1-2y,\ y)$ と表せるので，f によるこの点の像を，$(x',\ y')$ とすると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}&=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2\\-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2y\\y\end{pmatrix}\\&=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2(1-2y)+2y\\-3(1-2y)-3y\end{pmatrix}\\&=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2y+2\\3y-3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，$\begin{cases}x'=-\dfrac{1}{3}(-2y+2)\\y'=-\dfrac{1}{3}(3y-3)\end{cases}$

2 式から y を消去すると，$\dfrac{-3x'-2}{-2}=\dfrac{-3y'+3}{3}$

整理すると

$3(-3x'-2)=-2(-3y'+3)$

$-9x'-6=6y'-6$

$-9x'-6y'=0$

$3x'+2y'=0$

したがって，求める像は，直線 $\boldsymbol{3x+2y=0}$

237　原点のまわりに 90° だけ回転する線形変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\cos 90^\circ&-\sin 90^\circ\\\sin 90^\circ&\cos 90^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

（1）　この線形変換による点 $(1,\ 2)$ の像を，$(x',\ y')$ とすると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0-2\\1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，点 $\boldsymbol{(-2,\ 1)}$ に移される．

（2）　直線上の点は，$(x,\ 3x+1)$ と表せるので，この線形変換による像を，$(x',\ y')$ とすると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\3x+1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0-(3x+1)\\x+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x-1\\x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，$\begin{cases}x'=-3x-1\\y'=x\end{cases}$

2 式から x を消去すると，$x'=-3y'-1$

これより，$x'+3y'+1=0$

したがって，求める像は，直線 $\boldsymbol{x+3y+1=0}$

（3）　直線上の点は，$(x,\ 2-x)$ と表せるので，この線形変換による像を，$(x',\ y')$ とすると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\2-x\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0-(2-x)\\x+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2\\x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，$\begin{cases}x'=x-2\\y'=x\end{cases}$

2 式から x を消去すると，$x'=y'-2$

これより，$x'-y'+2=0$

したがって，求める像は，直線 $\boldsymbol{x-y+2=0}$

238　f_θ を表す行列を，A_θ，f_φ を表す行列を，A_φ とすると

$$A_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\quad A_\varphi=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$f_\varphi\circ f_\theta$ を表す行列は，$A_\varphi A_\theta$ であるから

$$\begin{aligned}A_\varphi A_\theta&=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta-\sin\varphi\sin\theta&-\cos\varphi\sin\theta-\sin\varphi\cos\theta\\\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi\sin\theta&-\sin\varphi\sin\theta+\cos\varphi\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\cos(\varphi+\theta)}&\boldsymbol{-\sin(\varphi+\theta)}\\\boldsymbol{\sin(\varphi+\theta)}&\boldsymbol{\cos(\varphi+\theta)}\end{pmatrix}\quad\text{（加法定理より）}\end{aligned}$$

これは，座標平面上の点を，**原点のまわりに $(\theta+\varphi)$ だけ回転する線形変換**を表す．

∎