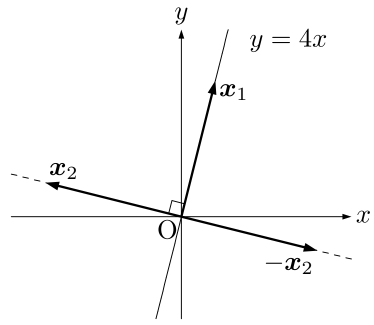
4章　行列の応用

§２　固有値とその応用　(p.65〜p.)

BASIC

248

（1）



直線 $y=4x$ に関する線対称の変換を表す行列を A とする．

$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1$ は $y=4x$ に平行で，$\boldsymbol{x}_2$ は $\boldsymbol{x}_1$ に垂直であるから

$$A\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_1,\quad A\boldsymbol{x}_2=-\boldsymbol{x}_2$$

すなわち

$$A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$$

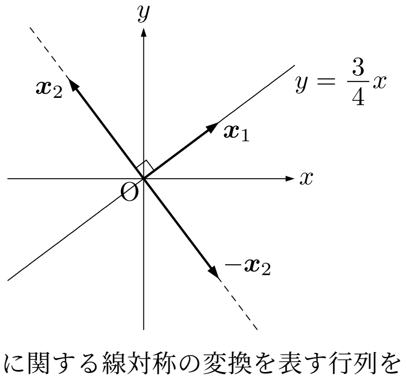
よって

$$A\begin{pmatrix}1&-4\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\4&-1\end{pmatrix}$$

これより

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}1&4\\4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4\\4&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&4\\4&-1\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{1-(-16)}\begin{pmatrix}1&4\\-4&1\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}1&4\\4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\-4&1\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-15&8\\8&15\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

（2）



直線 $y=\dfrac{3}{4}x$ に関する線対称の変換を表す行列を A とする．

$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1$ は $y=\dfrac{3}{4}x$ に平行で，$\boldsymbol{x}_2$ は $\boldsymbol{x}_1$ に垂直であるから

$$A\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_1,\quad A\boldsymbol{x}_2=-\boldsymbol{x}_2$$

すなわち

$$A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$

よって

$$A\begin{pmatrix}4&-3\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\3&-4\end{pmatrix}$$

これより

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}4&3\\3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-3\\3&4\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}4&3\\3&-4\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{16-(-9)}\begin{pmatrix}4&3\\-3&4\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}4&3\\3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3\\-3&4\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{25}\begin{pmatrix}7&24\\24&-7\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

249（1）

$$A\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$

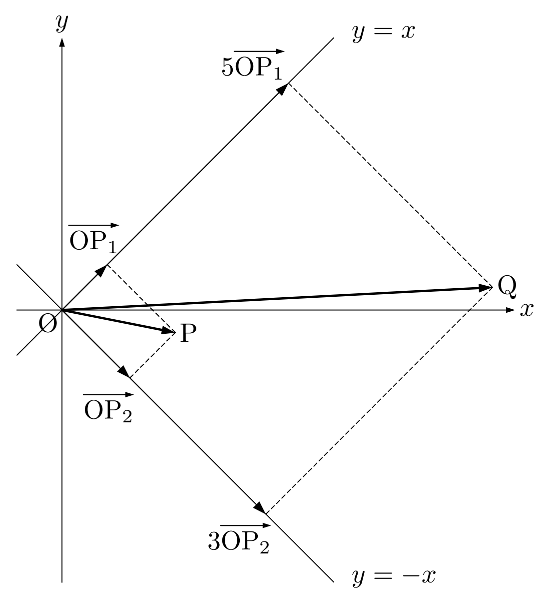
$$A\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$$

（2）　（1）より

$$A\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=5\boldsymbol{x}_1,\quad A\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}=3\boldsymbol{x}_2$$

点 P について，直線 $y=x$ および $y=-x$ 上にそれぞれ点 P_1，P_2 をとり，平行四辺形 $\mathrm{OP}_1\mathrm{PP}_2$ をつくる．点 P の f による像を Q とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=f(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_2})\\&=f(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1})+f(\overrightarrow{\mathrm{OP}_2})\\&=5\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}+3\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}\end{aligned}$$



250（1）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2 - 16$$
$$= (1-\lambda+4)(1-\lambda-4)$$
$$= (\lambda-5)(\lambda+3)$$

$(\lambda-5)(\lambda+3)=0$ より，固有値は，$\boldsymbol{\lambda = 5,\ -3}$

i) $\lambda = 5$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$(A-5E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-2y=0$

$y=c_1$ とおくと，$x=2y=2c_1$ であるから

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda = -3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$(A+3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+2y=0$

$y=c_2$ とおくと，$x=-2y=-2c_2$ であるから

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)(4-\lambda)+1$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 9$$
$$= (\lambda-3)^2$$

$(\lambda-3)^2 = 0$ より，固有値は，$\boldsymbol{\lambda = 3}$（重解）

$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．

$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0$

$x=c$ とおくと，$y=-x=-c$ であるから

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-1} \end{pmatrix} \quad (c \fallingdotseq 0)$$

251（1）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

（1 行 + 2 行）

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)\{-\lambda(-3-\lambda)-(-2)\}$$
$$= (3-\lambda)(\lambda^2+3\lambda+2)$$
$$= (3-\lambda)(\lambda+2)(\lambda+1)$$

$(3-\lambda)(\lambda+2)(\lambda+1)=0$ より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda = 3,\ -1,\ -2}$

i) $\lambda = 3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

よって，$-2x+y-z=0,\ y-7z=0$

$y=7z,\ x=3z$ であるから，$z=c_1$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{7} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda = -1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$(A+1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&3&1\\2&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$2x+y-z=0,\ y+z=0$

$y=-z,\ x=z$ であるから，$z=c_2$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\quad(c_2\fallingdotseq 0)$$

iii) $\lambda=-2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_3$ とする．

$$(A+2E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&4&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&4&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&-2\\2&4&1\\2&0&-1\end{pmatrix}$$

1 行 $+$ 2 行 $\times(-1)$

$$\to\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&10&5\\0&6&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x-3y-2z=0,\ 2y+z=0$

$z=-2y,\ x=-y$ であるから，$y=-c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{c_3}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}\quad(c_3\fallingdotseq 0)$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&3&2\\-6&7-\lambda&2\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}$$

1 行 $+$ 2 行 $\times(-1)$

$$=\begin{vmatrix}4-\lambda&-4+\lambda&0\\-6&7-\lambda&2\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&-1&0\\-6&7-\lambda&2\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&0&0\\-6&1-\lambda&2\\3&0&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\0&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\{(1-\lambda)(3-\lambda)-0\}$$

$$=(4-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

$(4-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)=0$ より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda=1,\ 3,\ 4}$

i) $\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-3&3&2\\-6&6&2\\3&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-3&3&2\\-6&6&2\\3&-3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-3&3&2\\0&0&-2\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-3&3&2\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$-3x+3y+2z=0,\ -2z=0$

$z=0,\ y=x$ であるから，$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\quad(c_1\fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda=3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-3E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-5&3&2\\-6&4&2\\3&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-5 & 3 & 2\\ -6 & 4 & 2\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -6 & 4 & 2\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

1 行 $+$ 2 行 $\times(-1)$

$$\to \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$，$-2y+2z=0$

$y=z$，$x=z$ であるから，$z=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix} \quad (c_2\fallingdotseq 0)$$

iii) $\lambda=4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_3$ とする．

$$(A-4E)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-6 & 3 & 2\\ -6 & 3 & 2\\ 3 & -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-6 & 3 & 2\\ -6 & 3 & 2\\ 3 & -3 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3 & -3 & -1\\ -6 & 3 & 2\\ -6 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}3 & -3 & -1\\ -6 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}3 & -3 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって，$3x-3y-z=0$，$-3y=0$

$y=0$，$z=3x$ であるから，$x=c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{c_3}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{3}\end{pmatrix} \quad (c_3\fallingdotseq 0)$$

252（1）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^3$$

$(1-\lambda)^3=0$ より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda=1}$ (3 重解)

$\lambda=1$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

これより，$x=0$，y，z は，同時に 0 とはならない任意の数となるので，$y=c_1$，$z=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\ c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}+\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$(c_1\fallingdotseq 0$，または $c_2\fallingdotseq 0)$

（2）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-5-\lambda & 2 & -2\\ -6 & 3-\lambda & -6\\ 2 & -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

(1 列 $+$ 3 列)

$$=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 0 & -3-\lambda\\ -6 & 3-\lambda & -6\\ 2 & -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-3-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -6 & 3-\lambda & -6\\ 2 & -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-3-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -6 & 3-\lambda & 0\\ 2 & -2 & -3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-3-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 0\\ -2 & -3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-3-\lambda)\{(3-\lambda)(-3-\lambda)-0\}$$

$$=-(\lambda-3)(\lambda+3)^2$$

$-(\lambda-3)(\lambda+3)^2=0$ より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda=3,\ -3}$ (2 重解)

i) $\lambda=3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-3E)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ -6 & 0 & -6\\ 2 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ -6 & 0 & -6\\ 2 & -2 & -4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって，$x+z=0$，$-y-3z=0$

$y=-3z,\ x=-z$ であるから，$z=-c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{3}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}\quad(c_1\fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda=-3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A+3E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-2&2&-2\\-6&6&-6\\2&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-2&2&-2\\-6&6&-6\\2&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x-y+z=0$

$x=y-z$ であるから，$y=c_2,\ z=c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}c_2-c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}+\boldsymbol{c_3}\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$(c_2\fallingdotseq 0,$ または $c_3\fallingdotseq 0)$

253　$P=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ より，

$$P^{-1}=\frac{1}{1-(-1)}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

よって

$$P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4+1&1+4\\-4+1&-1+4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&5\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5+5&-5+5\\-3+3&3+3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10&0\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$$

254　与えられた行列を A とする．

（1）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\3&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)-6$$

$$=\lambda^2-3\lambda+2-6$$

$$=\lambda^2-3\lambda-4$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-4)$$

$(\lambda+1)(\lambda-4)=0$ より，固有値は

$\lambda=-1,\ 4$

i）$\lambda=-1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A+1E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0$

$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad(c_1\fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda=4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-4E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-3&2\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$3x-2y=0$

$y=3c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\quad(c_2\fallingdotseq 0)$$

ここで，たとえば，$c_1=c_2=1$ とおき，対角化行列を P とすれば

$$P=(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2)=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{-1}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$$

このとき

$$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{4}\end{pmatrix}$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}6-\lambda&-2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(6-\lambda)(1-\lambda)-(-4)$$

$$=\lambda^2-7\lambda+6+4$$

$$=\lambda^2-7\lambda+10$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-5)$$

$(\lambda-2)(\lambda-5)=0$ より，固有値は

$\lambda=2,\ 5$

i）$\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(B-2E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}4&-2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$2x-y=0$

$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\quad(c_1\fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda=5$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(B-5E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x-2y=0$

$y=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad(c_2\fallingdotseq 0)$$

ここで，たとえば，$c_1 = c_2 = 1$ とおき，対角化行列を P とすれば

$$P = (\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

このとき

$$\boldsymbol{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

255（1）　固有多項式を求めると

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -6 & 6 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

1 行 $+$ 2 行 $\times(-1)$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3+\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -6 & 6 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -6 & 6 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -6 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\{(-1-\lambda)(1-\lambda) - 0\}$$

$$= -(3-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda)$$

$-(3-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda) = 0$ より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda = 3,\ \pm 1}$

i) $\lambda = 3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A - 3E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

よって，$x + y - z = 0,\ -6y + 4z = 0$

$2z = 3y,\ x = -y + z$ であるから，$z = 3c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii) $\lambda = 1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A - 1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x - z = 0,\ -y + z = 0$

$x = c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

iii) $\lambda = -1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_3$ とする．

$$(A + 1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x - y + z = 0,\ 2z = 0$

$z = 0,\ y = x$ であるから，$x = c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_3 = c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_3 \neq 0)$$

以上より，たとえば $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ とおいて，対角化行列を

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

とすれば

$$\boldsymbol{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\{-(3-\lambda)\lambda-(-2)\}$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$ より，固有値は
$\lambda=2,\ 1$（2 重解）

i) $\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-x=0,\ y+2z=0$

$x=0,\ y=-2z$ であるから，$z=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii) $\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y+z=0$

$x=-y-z$ であるから，$y=c_2,\ z=c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -c_2-c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(c_2 \neq 0,\ \text{または } c_3 \neq 0)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$
$$|P| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1 \neq 0$$

よって，P は正則であるから，A は対角化可能で

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

に対して

$$\boldsymbol{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

256（1）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)\{(3-\lambda)(2-\lambda)-0\}$$
$$= (3-\lambda)(2-\lambda)^2$$

$(3-\lambda)(2-\lambda)^2=0$ より，固有値は，$\lambda=3,\ 2$（2 重解）

i) $\lambda=3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより，$x=0,\ x+z=0,\ z=0,\ y$ は 0 以外の任意の数だから，$y=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii) $\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより，$x+y+z=0$

$x=-y-z$ であるから，$y=c_1,\ z=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -c_2-c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(c_2 \neq 0,\ \text{または } c_3 \neq 0)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$
$$|P| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2 \neq 0$$

よって，P は正則であるから，A は対角化可能で

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

に対して

$$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&2&-2\\-4&6-\lambda&-2\\1&-1&4-\lambda\end{vmatrix}$$

1 行 + 2 行 × (−1)

$$=\begin{vmatrix}4-\lambda&-4+\lambda&0\\-4&6-\lambda&-2\\1&-1&4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&-1&0\\-4&6-\lambda&-2\\1&-1&4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&0&0\\-4&2-\lambda&-2\\1&0&4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&-2\\0&4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\{(2-\lambda)(4-\lambda)-0\}$$

$$=(2-\lambda)(4-\lambda)^2$$

$(2-\lambda)(4-\lambda)^2=0$ より，固有値は

$\lambda=2,\ 4$ (2 重解)

i) $\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする.

$$(A-2E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-2&2&-2\\-4&4&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-2&2&-2\\-4&4&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x-y+z=0,\ -z=0$

$z=0,\ y=x$ であるから，$x=c_1$ とおくと,

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\qquad(c_1\fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda=4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする.

$$(A-4E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-4&2&-2\\-4&2&-2\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-4&2&-2\\-4&2&-2\\1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\-4&2&-2\\-4&2&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0,\ -2y-2z=0$

$x=y,\ z=-y$ であるから，$y=c_2$ とおくと,

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\qquad(c_2\fallingdotseq 0)$$

線形独立である固有ベクトルが 2 本しか得られないので,
この行列の対角化はできない.

257　与えられた行列を A とする.

（1）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-3-\lambda&6\\6&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-3-\lambda)(2-\lambda)-36$$

$$=\lambda^2+\lambda-6-36$$

$$=\lambda^2+\lambda-42$$

$$=(\lambda+7)(\lambda-6)$$

$(\lambda+7)(\lambda-6)=0$ より，固有値は，$\lambda=-7,\ 6$

i) $\lambda=-7$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする.

$$(A+7E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}4&6\\6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$2x+3y=0$

$x=3c_1$ とおくと,

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\qquad(c_1\fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda=6$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする.

$$(A-6E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-9&6\\6&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$3x-2y=0$

$x=2c_2$ とおくと,

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\qquad(c_2\fallingdotseq 0)$$

$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ は互いに直交している.

大きさが 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1=\pm\frac{1}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

よって，たとえば対角化するための直交行列を

$$T = \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix} \text{とすれば}$$

$$\boldsymbol{{}^tTAT = \begin{pmatrix}-7 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}}$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$= -\lambda(3-\lambda)-4$$
$$= \lambda^2-3\lambda-4$$
$$= (\lambda+1)(\lambda-4)$$

$(\lambda+1)(\lambda-4)=0$ より，固有値は，$\lambda=-1,\ 4$

i) $\lambda=-1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A+1E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x+2y=0$

$y=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda=4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-4E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$2x-y=0$

$x=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ は互いに直交している．

大きさが 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

よって，たとえば対角化するための直交行列を

$$T = \begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} \text{とすれば}$$

$$\boldsymbol{{}^tTAT = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}}$$

（3）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(-3-\lambda)-16$$
$$= \lambda^2-9-16$$
$$= \lambda^2-25$$
$$= (\lambda+5)(\lambda-5)$$

$(\lambda+5)(\lambda-5)=0$ より，固有値は，$\lambda=\pm5$

i) $\lambda=-5$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A+5E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{pmatrix}8 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$2x+y=0$

$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda=5$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-5E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x-2y=0$

$y=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ は互いに直交している．

大きさが 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

よって，たとえば対角化するための直交行列を

$$T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} \text{とすれば}$$

$$\boldsymbol{{}^tTAT = \begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}}$$

（4）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 8 \\ 1 & 5-\lambda & -8 \\ 8 & -8 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

(1 行 + 2 行)

$$= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 6-\lambda & 0 \\ 1 & 5-\lambda & -8 \\ 8 & -8 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & -8 \\ 8 & -8 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & -8 \\ 8 & -16 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -8 \\ -16 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)\{(4-\lambda)(-4-\lambda)-124\}$$

$$= (6-\lambda)(\lambda^2-16-128)$$

$$= (6-\lambda)(\lambda^2-144)$$

$$= (6-\lambda)(\lambda+12)(\lambda-12)$$

$(6-\lambda)(\lambda+12)(\lambda-12)=0$ より，固有値は，$\lambda=6,\ \pm 12$

i) $\lambda=6$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-6E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -8 \\ 8 & -8 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -8 \\ 8 & -8 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 \end{pmatrix}$$

よって，$-x+y+8z=0,\ 54z=0$

$z=0,\ x=y$ であるから，$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda=-12$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A+12E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 1 & 8 \\ 1 & 17 & -8 \\ 8 & -8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 17 & 1 & 8 \\ 1 & 17 & -8 \\ 8 & -8 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 17 & 1 & 8 \\ 1 & 17 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 17 & -8 \\ 17 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 18 & -9 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-y+z=0,\ 2y-z=0$

$z=2y,\ x=-y$ であるから，$y=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

iii) $\lambda=12$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_3$ とする．

$$(A-12E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 8 \\ 1 & -7 & -8 \\ 8 & -8 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 8 \\ 1 & -7 & -8 \\ 8 & -8 & -16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7 & 1 & 8 \\ 1 & -7 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -7 & -8 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-y-2z=0,\ y+z=0$

$y=-z,\ x=z$ であるから，$z=c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_3 = c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3$ は互いに直交している．

大きさが 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_3=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

よって，たとえば対角化するための直交行列を

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$ とすれば

$$\boldsymbol{{}^tTAT=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&-12&0\\0&0&12\end{pmatrix}}$$

258　$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-2\\1&1-\lambda&2\\-2&2&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

（1 行 + 2 行）

$$=\begin{vmatrix}2-\lambda&2-\lambda&0\\1&1-\lambda&2\\-2&2&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1-\lambda&2\\-2&2&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-\lambda&2\\-2&4&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&2\\4&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\{-\lambda(-2-\lambda)-8\}$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-8)$$

$$=(2-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-2)$$

$$=-(\lambda+4)(\lambda-2)^2$$

$-(\lambda+4)(\lambda-2)^2=0$ より，固有値は，$\lambda=-4,\ 2$　（2 重解）

i) $\lambda=-4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A+4E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&6&2\\-2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&5&2\\-2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&5&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&5&2\\5&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&6&3\\0&6&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&6&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x-y-z=0,\ 2y+z=0$

$z=-2y,\ x=-y$ であるから，$y=-c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

ii) $\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-2E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix}-1&1&-2\\1&-1&2\\-2&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-1&1&-2\\1&-1&2\\-2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&-2\\1&-1&2\\-2&2&-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$-x+y-2z=0$

$x=y-2z$ であるから，$y=c_2,\ z=c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}c_2-2c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$(c_2\neq 0$ または $c_3\neq 0)$

ここで，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ とおく．

$\boldsymbol{p}_2$ と同じ向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{p}_3$ の $\boldsymbol{p}_2$ への正射影を求めると

$$(\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-2+0+0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

よって

$$\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{p}_3 - (\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{u}_2$$
$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすれば，$\boldsymbol{q}_3$ は $\boldsymbol{p}_2$ と直交する．

$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{q}_3$ に平行な単位ベクトルを用いて，たとえば，直交行列 T を

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

とすれば，$^tTAT = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

259　$\boldsymbol{x}' = {}^tT\boldsymbol{x}$ より

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\boldsymbol{x'}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{x'+2y'}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2x'+y'}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

すなわち，$\begin{cases} x = \dfrac{x'+2y'}{\sqrt{5}} \\ y = \dfrac{-2x'+y'}{\sqrt{5}} \end{cases}$

よって

$$F = 5x^2 + 4xy + 2y^2$$
$$= 5\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4 \cdot \frac{x'+2y'}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-2x'+y'}{\sqrt{5}} + 2\left(\frac{-2x'+y'}{\sqrt{5}}\right)^2$$
$$= \frac{5(x'+2y')^2 + 4(x'+2y')(-2x'+y') + 2(-2x'+y')^2}{5}$$
$$= \frac{1}{5}\{5(x'^2 + 4x'y' + 4y'^2) + 4(-2x'^2 - 3x'y' + 2y'^2) + 2(4x'^2 - 4x'y' + y'^2)\}$$
$$= \frac{1}{5}(5x'^2 + 30y'^2) = \boldsymbol{x'^2 + 6y'^2}$$

260（1）　与式は，$(x \quad y)\begin{pmatrix} 11 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことができる．$A = \begin{pmatrix} 11 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ とおき，A の固有多項式を求めると

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (11-\lambda)(1-\lambda) - 75$$
$$= \lambda^2 - 12\lambda + 11 - 75$$
$$= \lambda^2 - 12\lambda - 64$$
$$= (\lambda+4)(\lambda-16)$$

$(\lambda+4)(\lambda-16) = 0$ より，固有値は

$\lambda = -4,\ 16$

i) $\lambda = -4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$(A+4E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 15 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$3x - \sqrt{3}y = 0$ より，$\sqrt{3}x - y = 0$

$x = c_1$ とおくと，

$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$　$(c_1 \neq 0)$

ii) $\lambda = 16$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$(A-16E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -5 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-5x - 5\sqrt{3}y = 0$ より，$x + \sqrt{3}y = 0$

$y = c_2$ とおくと，

$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$　$(c_2 \neq 0)$

大きさが 1 の固有ベクトルを，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ とすると

$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

直交行列 T を

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

とすれば

$$^tTAT = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

すなわち，$A = T\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}{}^tT$

よって

$$(x \quad y)T\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすれば

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{-4x'^2 + 16y'^2}$

また，このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{x'-\sqrt{3}y'}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}x'+y'}{2} \end{pmatrix}$$

すなわち，$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{x'-\sqrt{3}y'}{2}} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{\sqrt{3}x'+y'}{2}} \end{cases}$

（2）　与式は，$(x\ \ y)\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことができる．$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ とおき，A の固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 9$$

$$= (\lambda+3)(\lambda-3)$$

$(\lambda+3)(\lambda-3) = 0$ より，固有値は

$\lambda = -3,\ 3$

i）$\lambda = -3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$(A+3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0$

$x = c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda = 3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$

$x = c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

直交行列 T を

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とすれば

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

すなわち，$A = T\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}{}^tT$

よって

$$(x\ \ y)T\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすれば

$$(x'\ \ y')\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{-3x'^2 + 3y'^2}$

また，このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-x'+y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

すなわち，$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{-x'+y'}{\sqrt{2}}} \end{cases}$

※ 2 次曲線のグラフを描く場合であれば，回転角を求める場合のことを考えて，$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とした方がよいです．

261　$5x^2 - 8xy + 5y^2$ は，$(x\ \ y)\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことができる．

$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ とおき，A の固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)^2 - 16$$

$$= \{(5-\lambda)+4\}\{(5-\lambda)-4\}$$

$$= (\lambda-9)(\lambda-1)$$

$(\lambda-9)(\lambda-1) = 0$ より，固有値は

$\lambda = 9,\ 1$

i）$\lambda = 1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$

$x = c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda = 9$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$(A-9E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0$

$y=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

直交行列 T を

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とすれば

$$^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

すなわち，$A = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}{}^tT$

よって

$$(x \ \ y)T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすれば

$$(x' \ \ y')\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

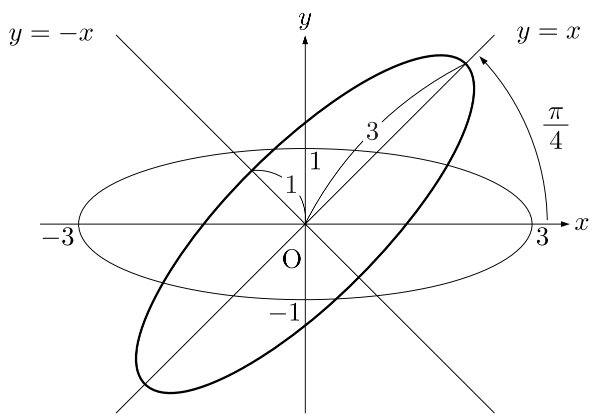
よって，標準形は，$\boldsymbol{x'^2 + 9y'^2}$

以上より，$(x',\ y')$ は $x'^2+9y'^2=9$，すなわち，楕円 $\dfrac{x'^2}{3^2}+y'^2=1$ 上の点であり

$$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}'$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}'$$

であるから，$(x,\ y)$ はこの楕円を，原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した図形である．



262（1）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 - 1$$

$$= \{(2-\lambda)+1\}\{(2-\lambda-1)\}$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-1)$$

$(\lambda-3)(\lambda-1)=0$ より，固有値は

$\lambda = 1,\ 3$

i）$\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0$

$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda=3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$

$x=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

ここで，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

とすれば，$P^{-1}AP=D$，すなわち，$A=PDP^{-1}$

また，$P^{-1} = \dfrac{1}{1-(-1)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

よって

$$A^n = (PDP^{-1})^n$$

$$= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})$$

$$= PD^nP^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 3^n \\ -1\cdot 1 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & -1+3^n \\ -1+3^n & 1+3^n \end{pmatrix}}$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(4-\lambda) - 6$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 4 - 6$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 10$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-5)$$

$(\lambda+2)(\lambda-5)=0$ より，固有値は

$\lambda = -2,\ 5$

i）$\lambda=-2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x + 3y = 0$

$y = -c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda = 5$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$(A-5E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$2x - y = 0$

$x = c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

ここで，$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

とすれば，$P^{-1}AP = D$，すなわち，$A = PDP^{-1}$

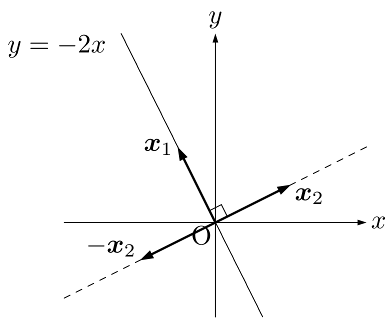
また，$P^{-1} = \dfrac{1}{6-(-1)}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

よって

$$\begin{aligned}
A^n &= (PDP^{-1})^n \\
&= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) \\
&= PD^nP^{-1} \\
&= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3\cdot(-2)^n & 5^n \\ -1\cdot(-2)^n & 2\cdot 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6\cdot(-2)^n + 5^n & -3\cdot(-2)^n + 3\cdot 5^n \\ -2\cdot(-2)^n + 2\cdot 5^n & (-2)^n + 6\cdot 5^n \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

CHECK

263



直線 $y = -2x$ に関する線対称の変換を表す行列を A とする．

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1$ は $y = -2x$ に平行で，

$\boldsymbol{x}_2$ は $\boldsymbol{x}_1$ に垂直であるから

$$A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1, \quad A\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_2$$

すなわち

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって

$$A\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

これより

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\left\{\frac{1}{-1-4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

264（1）　固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}
|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 \\
&= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\
&= (\lambda-2)(\lambda-3)
\end{aligned}$$

$(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$ より，固有値は，$\boldsymbol{\lambda = 2,\ 3}$

i）$\lambda = 2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x - y = 0$

$y = c_1$ とおくと，$x = c_1$ であるから

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda = 3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x - 2y = 0$

$y = c_2$ とおくと，$x = 2y = 2c_2$ であるから

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

（2）　固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}
|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix} 13-\lambda & -30 \\ 5 & -12-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (13-\lambda)(-12-\lambda) + 150 \\
&= \lambda^2 - \lambda - 156 + 150 \\
&= \lambda^2 - \lambda - 6 \\
&= (\lambda+2)(\lambda-3)
\end{aligned}$$

$(\lambda+2)(\lambda-3)=0$ より，固有値は，$\boldsymbol{\lambda=-2,\ 3}$

i) $\lambda=-2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 15 & -30 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-2y=0$

$y=c_1$ とおくと，$x=2y=2c_1$ であるから

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda=3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-3y=0$

$y=c_2$ とおくと，$x=3y=3c_2$ であるから

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

265（1）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

（1 行 + 2 行）

$$=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

（3 行 + 1 行 × (−2)）

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\{(2-\lambda)(4-\lambda)-0\}$$

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$$

$(1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)=0$ より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda=1,\ 2,\ 4}$

i) $\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，$-y-z=0,\ 2x+z=0$

すなわち，$z=-2x,\ y=-z=2x$ であるから，$x=c_1$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{-2} \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y+z=0,\ z=0$

すなわち，$z=0,\ y=-x$ であるから，$x=c_2$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

iii) $\lambda=4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_3$ とする．

$$(A-4E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1 行 + 3 行 × (−1)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-y+z=0,\ -2y+z=0$

すなわち，$z=2y,\ x=y-z=-y$ であるから，$y=-c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{c_3}\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{-2} \end{pmatrix} \quad (c_3 \fallingdotseq 0)$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

1 行 + 3 行

$$=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\{(4-\lambda)(2-\lambda)-0\}$$

$$=(4-\lambda)(2-\lambda)^2$$

$(4-\lambda)(2-\lambda)^2=0$ より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda=4,\ 2}$(2 重解)

i) $\lambda=4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-4E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-2x-3y=0,\ -3y+2z=0$

すなわち，$y=-\dfrac{2}{3}x,\ z=\dfrac{3}{2}y=-x$ であるから，$x=3c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}\quad (c_1\neq 0)$$

ii) $\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-3y=0,\ x+y+z=0$

すなわち，$y=0,\ x+z=0$ であるから，$x=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}\quad (c_2\neq 0)$$

266　与えられた行列を A とする．

（1）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)(-7-\lambda)-(-16)$$

$$=\lambda^2+4\lambda-21+16$$

$$=\lambda^2+4\lambda-5$$

$$=(\lambda+5)(\lambda-1)$$

$(\lambda+5)(\lambda-1)=0$ より，固有値は

$\lambda=-5,\ 1$

i) $\lambda=-5$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A+5E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$2x-y=0$

$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\quad (c_1\neq 0)$$

ii) $\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-2y=0$

$y=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\quad (c_2\neq 0)$$

ここで，たとえば，$c_1=c_2=1$ とおき，対角化行列を P とすれば

$$P=(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2)=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

このとき

$$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)(-1-\lambda)-(-9)$$

$$=\lambda^2-4\lambda-5+9$$

$$=\lambda^2-4\lambda+4$$

$$=(\lambda-2)^2$$

$(\lambda-2)^2=0$ より，固有値は

$\lambda=2$ （2 重解）

$\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．

$(B-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって，$x-y=0$

$x=c$ とおくと，

$$\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \fallingdotseq 0)$$

固有ベクトルが 1 本しか得られないので，対角化できない．

（3）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot 1\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

（2 行に関する展開）

$$= (1-\lambda)\{(2-\lambda)^2-1\}$$
$$= (1-\lambda)\{(2-\lambda)+1\}\{(2-\lambda)-1\}$$
$$= (1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)$$
$$= (3-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$(3-\lambda)(1-\lambda)^2=0$ より，固有値は，$\lambda=3,\ 1$（2 重解）

i）$\lambda=3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより，$x+y+z=0$，$y=0$ だから，$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

これより，$x-y-z=0$

すなわち，$x=y+z$ であるから，$y=c_1$，$z=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} c_2+c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(c_2 \fallingdotseq 0$，または $c_3 \fallingdotseq 0)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-1) = 2 \fallingdotseq 0$$

よって，P は正則であるから，A は対角化可能で

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

に対して

$$\boldsymbol{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

（4）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

1 行 + 2 行

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\{(2-\lambda)(1-\lambda)-0\}$$
$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$(2-\lambda)(1-\lambda)^2=0$ より，固有値は

$\lambda=2,\ 1$（2 重解）

i）$\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y+3z=0$，$z=0$

すなわち，$z=0$，$y=-x$ であるから，$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0$，$y+3z=0$

すなわち，$y=-3z$，$x=-y=3z$ であるから，$z=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

線形独立である固有ベクトルが 2 本しか得られないので，この行列の対角化はできない．

267　与えられた行列を A とする．

（1）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (7-\lambda)(1-\lambda)-16$$

$$= \lambda^2-8\lambda+7-16$$

$$= \lambda^2-8\lambda-9$$

$$= (\lambda-9)(\lambda+1)$$

$(\lambda-9)(\lambda+1)=0$ より，固有値は，$\lambda=9,\ -1$

i）$\lambda=9$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-9E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-2y=0$

$y=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda=-1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A+1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$2x+y=0$

$x=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ は互いに直交している．

大きさが 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

よって，たとえば対角化するための直交行列を

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ とすれば}$$

$$\boldsymbol{{}^tTAT = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

（1 行 + 2 行）

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\{(1-\lambda)(2-\lambda)-2\}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2-2)$$

$$= \lambda(1-\lambda)(\lambda-3)$$

$\lambda(1-\lambda)(\lambda-3)=0$ より，固有値は，$\lambda=0,\ 1,\ 3$

i）$\lambda=0$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-0E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-z=0,\ y+z=0$

すなわち，$x=z,\ y=-z$ であるから，$z=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-y-z=0,\ z=0$

すなわち，$z=0,\ y=x$ であるから，$x=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

iii）$\lambda=3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_3$ とする．

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-y+z=0,\ -2y+z=0$

すなわち，$z=2y,\ x=y-z=-y$ であるから，$y=c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_3 = c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3$ は互いに直交している．

大きさが 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって，たとえば対角化するための直交行列を

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ とすれば}$$

$$\boldsymbol{{}^tTAT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

268

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

（1 行 + 2 行 + 3 行）

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-1-\lambda)^2$$

$(2-\lambda)(-1-\lambda)^2=0$ より，固有値は，$\lambda=2,\ -1$ （2 重解）

i）$\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x-2y+z=0,\ y-z=0$

すなわち，$y=z,\ x=2y-z=z$ であるから，$z=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

ii）$\lambda=-1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A+1E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x+y+z=0$

$x=-y-z$ であるから，$y=c_2,\ z=c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-c_2-2c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$(c_2\neq 0$ または $c_3\neq 0)$

ここで，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ とおく．

$\boldsymbol{p}_2$ と同じ向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{p}_3$ の $\boldsymbol{p}_2$ への正射影を求めると

$$(\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0+0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

よって，$\boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{p}_3-(\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{u}_2$

$$=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2-(-1)\\0-1\\2-0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

とすれば，$\boldsymbol{q}_3$ は $\boldsymbol{p}_2$ と直交する．

$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{q}_3$ に平行な単位ベクトルをそれぞれ，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_3$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_3=\pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

したがって，たとえば，直交行列 T を

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

とすれば，$^tTAT=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$

269　与式は，$(x\ \ y)\begin{pmatrix}4&-5\\-5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と表すことができる．

$A=\begin{pmatrix}4&-5\\-5&4\end{pmatrix}$ とおき，A の固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&-5\\-5&4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)(4-\lambda)-5^2$$

$$=\{(4-\lambda)+5\}\{(4-\lambda)-5\}$$

$$=(9-\lambda)(-1-\lambda)$$

$(9-\lambda)(-1-\lambda)=0$ より，固有値は

$\lambda=9,\ -1$

i）$\lambda=9$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A+4E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-5&-5\\-5&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0$ より，$y=-x$ であるから，$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

ii）$\lambda=-1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A+1E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}5&-5\\-5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$ より，$y=x$ であるから，$y=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{u}_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

直交行列 T を

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とすれば

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

すなわち，$A = T\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}{}^tT$

よって

$$(x \ \ y)T\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすれば

$$(x' \ \ y')\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{9x'^2 - y'^2}$

また，このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{-x'+y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

すなわち，$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{-x'+y'}{\sqrt{2}}} \end{cases}$

270（1）　固有多項式を求めると

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -6 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (7-\lambda)(-2-\lambda) - (-18)$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda - 14 + 18$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

$(\lambda-1)(\lambda-4) = 0$ より，固有値は

$\lambda = 1,\ 4$

ｉ）$\lambda = 1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A - 1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x - y = 0$

$x = c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda = 4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A - 4E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x - 2y = 0$

$y = c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

ここで，$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

とすれば，$P^{-1}AP = D$，すなわち，$A = PDP^{-1}$

また，$P^{-1} = \dfrac{1}{1-2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

よって

$$A^n = (PDP^{-1})^n$$

$$= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})$$

$$= PD^nP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 4^n \\ 1 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 2\cdot 4^n & 2 - 2\cdot 4^n \\ -1 + 4^n & 2 - 4^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{2^{2n+1} - 1} & \boldsymbol{2 - 2^{2n+1}} \\ \boldsymbol{2^{2n} - 1} & \boldsymbol{2 - 2^{2n}} \end{pmatrix}$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(5-\lambda) - 8$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 15 - 8$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 7$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 7)$$

$(\lambda-1)(\lambda-7) = 0$ より，固有値は

$\lambda = 1,\ 7$

ｉ）$\lambda = 1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A - 1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x + 2y = 0$

$y = -c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda = 7$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A - 7E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-x + y = 0$

$x = c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

ここで，$P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$

とすれば，$P^{-1}AP=D$，すなわち，$A=PDP^{-1}$

また，$P^{-1}=\dfrac{1}{2-(-1)}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

よって

$$\begin{aligned}
A^n &= (PDP^{-1})^n\\
&= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})\\
&= PD^nP^{-1}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 7^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 7^n\\ -1 & 7^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+7^n & -2+2\cdot 7^n\\ -1+7^n & 1+2\cdot 7^n\end{pmatrix}}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7^n+2 & 2\cdot 7^n-2\\ 7^n-1 & 2\cdot 7^n+1\end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

∎