練習問題 1-A

1. （1）

$$2\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{x}=3\vec{b}$$
$$2\vec{x}=3\vec{b}-2\vec{a}-2\vec{b}$$
$$2\vec{x}=-2\vec{a}+\vec{b}$$
$$\boldsymbol{\vec{x}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}$$

（2）

$$-\vec{x}-\vec{x}=-\vec{b}-\vec{a}$$
$$-2\vec{x}=-\vec{a}-\vec{b}$$
$$\boldsymbol{\vec{x}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}$$

2. 題意より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 3\cdot\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$$=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$$

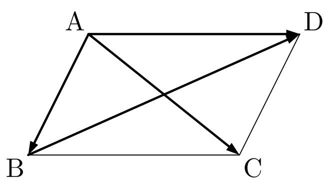
したがって

$$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2$$
$$=2^2+4\cdot(-3)+3^2$$
$$=4-12+36=28$$

$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|\geqq 0$ であるから，$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{28}=\boldsymbol{2\sqrt{7}}$

3. 平行四辺形 ABCD において

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$



よって

$$左辺=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2+\left|-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2$$
$$+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2$$
$$=2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+2\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2$$
$$=2\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2\right)=右辺$$

4. $\vec{a}+\vec{b}=(2+x,\ 3+(-2))=(2+x,\ 1)$

$\vec{a}-\vec{b}=(2-x,\ 3-(-2))=(2-x,\ 5)$

（1）　$(\vec{a}+\vec{b})\,/\!/\,(\vec{a}-\vec{b})$ となるとき，$(\vec{a}+\vec{b})=k(\vec{a}-\vec{b})$ を満たす実数 k が存在する．成分で表せば

$$(2+x,\ 1)=k(2-x,\ 5)$$

すなわち

$$\begin{cases}2+x=k(2-x) & \cdots ① \\ 1=5k & \cdots ②\end{cases}$$

② より，$k=\dfrac{1}{5}$

① に代入して

$$2+x=\frac{1}{5}(2-x)$$
$$10+5x=2-x$$
$$6x=-8$$
$$\boldsymbol{x=-\frac{4}{3}}$$

（2）　$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$ となるとき，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ が成り立つから

$$(2+x)(2-x)+1\cdot 5=0$$
$$4-x^2+5=0$$
$$x^2=9$$
$$\boldsymbol{x=\pm 3}$$

〔別解〕

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ より，$\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2=0$

すなわち，$\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2$ であるから

$$(2^2+3^2)=\{x^2+(-2)^2\}$$
$$13=x^2+4$$
$$x^2=9$$
$$\boldsymbol{x=\pm 3}$$

5. 題意より

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

よって

$$右辺=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$
$$=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$
$$=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=左辺$$

6. $x=2-2t$ より，$t=\dfrac{x-2}{-2}$

$y=-1+3t$ より，$t=\dfrac{y+1}{3}$

2 式から t を消去して，$\boldsymbol{\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{3}}$

または，これを整理して

$$-3(x-2)=2(y+1)$$
$$-3x+6=2y+2$$

したがって，　$\boldsymbol{3x+2y-4=0}$

7. （1）　$\boldsymbol{(2,\ -1)}$

（2）　直線 ℓ_1 は，点 P $(1,\ -1)$ を通り，$(2,\ -1)$ を方向ベクトルとする直線であるから，直線 ℓ_1 上の任意の点を $(x,\ y)$ とすれば

$$(x,\ y)=(1,\ -1)+t(2,\ -1)$$

すなわち，$\boldsymbol{x=1+2t,\ \ y=-1-t}\cdots①$

（3）　交点の座標を $(x,\ y)$ とすれば，この点は ℓ および，ℓ_1 上にあるから，$2x-y+3=0\cdots②$ と ① を満たす．

① を ② に代入して

$$2(1+2t)-(-1-t)+3=0$$

$2+4t+1+t+3=0$

$5t=-6$

$t=-\dfrac{6}{5}$

これを，① に代入して

$$x=1+2\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)$$
$$=1-\frac{12}{5}=-\frac{7}{5}$$
$$y=-1-\left(-\frac{6}{5}\right)$$
$$=-1+\frac{6}{5}=\frac{1}{5}$$

よって，交点の座標は $\left(\boldsymbol{-\frac{7}{5},\ \frac{1}{5}}\right)$

8. （1） $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ とおくと

$$(9,\ -8)=m(3,\ 2)+n(1,\ -4)$$
$$=(3m+n,\ 2m-4n)$$

よって

$$\begin{cases} 9=3m+n & \cdots① \\ -8=2m-4n & \cdots② \end{cases}$$

$$\begin{array}{lrl} ①\times 4 & 12m+4n & =36 \\ ② & +)\quad 2m-4n & =-8 \\ \hline & 14m & =28 \\ & m & =2 \end{array}$$

これを ① に代入して

$9=3\cdot 2+n$

$n=3$

よって，$\boldsymbol{\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}}$

（2） $\vec{a}=k\vec{b}+l\vec{c}$ とおくと

$$(3,\ 2)=k(1,\ -4)+l(9,\ -8)$$
$$=(k+9l,\ -4k-8l)$$

よって

$$\begin{cases} 3=k+9l & \cdots① \\ 2=-4k-8l & \cdots② \end{cases}$$

① より，$k=3-9l$

これを ② に代入して

$2=-4(3-9l)-8l$

$2=-12+36l-8l$

$28l=14$

$l=\dfrac{1}{2}$

これより，$k=3-9\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$

よって，$\boldsymbol{\vec{a}=-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$

〔別解〕

（1）より，$\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ であるから

$2\vec{a}=-3\vec{b}+\vec{c}$

$$\boldsymbol{\vec{a}=-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

練習問題 1-B

1. D は辺 AB を $|\vec{a}|:|\vec{b}|$ に内分する点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$$

よって

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}$$
$$=\frac{1}{|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}\left\{\vec{a}\cdot\left(\frac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\right)\right\}$$
$$=\frac{\vec{a}\cdot\left(|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}\right)}{|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)}$$
$$=\frac{|\vec{b}||\vec{a}|^2+|\vec{a}|\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)}$$
$$=\frac{|\vec{a}|\left(|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)}$$
$$=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)}$$

$$\cos\beta=\frac{\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\vec{b}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}$$
$$=\frac{1}{|\vec{b}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}\left\{\vec{b}\cdot\left(\frac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\right)\right\}$$
$$=\frac{\vec{b}\cdot\left(|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}\right)}{|\vec{b}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)}$$
$$=\frac{|\vec{b}|\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}||\vec{b}|^2}{|\vec{b}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)}$$
$$=\frac{|\vec{b}|\left(|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{|\vec{b}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)}$$
$$=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)}$$

よって，$\cos\alpha=\cos\beta$

2. A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ とおくと，△ABC の重心の位置ベクトルは

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

ここで，L，M，N の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{l},\ \vec{m},\ \vec{n}$ とすると

$$\vec{l}=\frac{1\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$$
$$\vec{m}=\frac{1\vec{c}+2\vec{a}}{2+1}=\frac{\vec{c}+2\vec{a}}{3}$$
$$\vec{n}=\frac{1\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$

よって，△LMN の重心の位置ベクトルは

$$\frac{\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}+\frac{\vec{c}+2\vec{a}}{3}+\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\vec{b}+2\vec{c}+\vec{c}+2\vec{a}+\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}}{3}$$
$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

したがって，△ABC と △LMN の重心は一致する．

3. （1）　左辺 $=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2}$

$$=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)}$$
$$=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta}$$
$$=\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)^2}$$
$$=\big||\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\big|$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\sin\theta\geqq 0$ であるから，$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\geqq 0$
よって，$\big||\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\big|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=$ 右辺

（2）　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\qquad \text{（1）より}$$

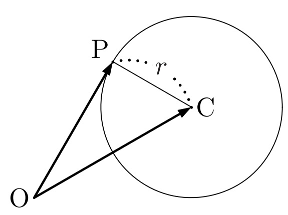
（3）　$|\vec{a}|^2=a_1{}^2+a_2{}^2$
$|\vec{b}|^2=b_1{}^2+b_2{}^2$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$
よって

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a_1{}^2b_1{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2-(a_1{}^2b_1{}^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2{}^2b_2{}^2)}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a_1{}^2b_2{}^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2{}^2b_1{}^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$
$$=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

4.　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 0)-(1,\ 3)$
$=(-3,\ -3)$
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ -2)-(1,\ 3)$
$=(-2,\ -5)$
これらと，**3.** の結果より

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|-3\cdot(-5)-(-3)\cdot(-2)|$$
$$=\frac{1}{2}|15-6|$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 9=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

5. （1）　$\mathrm{CP}=\mathrm{r}$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$



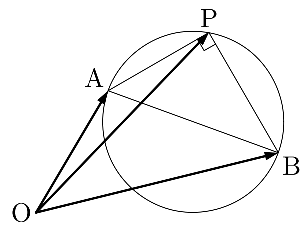
$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから，求めるベクトル方程式は
$$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=r}$$

（2）　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=r$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=r^2$
ここで，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(x,\ y)-(a,\ b)$$
$$=(x-a,\ y-b)$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=(x-a)^2+(y-b)^2$
以上より，この円の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ となる．

6. （1）　直径 AB に対する円周角は直角であるから，$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ である．
よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$，すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，求めるベクトル方程式は
$$\boldsymbol{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0}$$

（2）　点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x,\ y)-(x_1,\ y_1)$$
$$=(x-x_1,\ y-y_1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x,\ y)-(x_2,\ y_2)$$
$$=(x-x_2,\ y-y_2)$$

よって
$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)$$

以上より，この円の方程式は
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ となる．

∎