

1章 ベクトル

問 1

正方形の性質より, $AB = AD = DC = \sqrt{2}$

三平方の定理より

$$AC = AB \times \sqrt{2} = 2$$

$$\text{また, } OA = OC = \frac{1}{2}AC = 1$$

以上より

$$|\vec{AB}| = |\vec{AD}| = |\vec{DC}| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{AC}| = 2$$

$$|\vec{OA}| = |\vec{OC}| = 1$$

大きさと向きが同じベクトルが等しいベクトルであるから

$$\vec{AB} \text{ と } \vec{DC}$$

大きさが1のベクトルが単位ベクトルであるから

$$\vec{OA}, \vec{CO}$$

問 2

大きさが同じで向きが反対であるものが, 互いに逆ベクトルとなるので

$$\vec{OA} \text{ と } \vec{OC}, \vec{OB} \text{ と } \vec{OD}$$

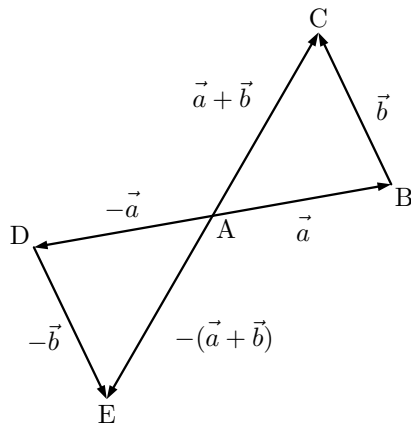
問 3

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{PQ} &= \vec{PA} + \vec{AB} + \vec{BQ} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \vec{PQ} &= \vec{PB} + \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CQ} \\ &= -\vec{c} + (-\vec{a}) + \vec{b} + \vec{d} \\ &= -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} \end{aligned}$$

問 4

$m = -1$ であるから, 証明すべき式は, $-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$ である.



線分 AB の延長上に点 D をとり, $\vec{AD} = -\vec{AB}$ となるようにする.

点 D を通り, 直線 BC に平行な直線と直線 AC との交点を E とすると, $\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ は合同だから, $DE = BC$, $AE = AC$ であり, ベクトルの向きを考えると

$$\vec{DE} = -\vec{BC}, \vec{AE} = -\vec{AC}$$

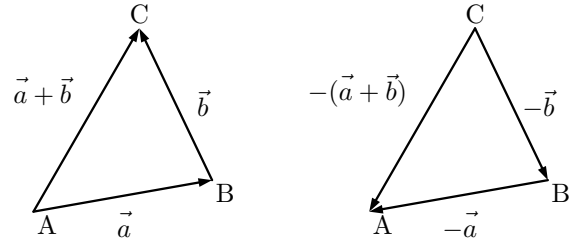
ここで, $\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE}$ より

$$-\vec{AC} = -\vec{AB} + (-\vec{BC}) = -\vec{AB} - \vec{BC}$$

すなわち, $-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$ である.

〔別解〕

左側の図のように $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ であるから, 右側の図のように $\vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$ である.



ここで, $\vec{CB} = -\vec{b}$, $\vec{BA} = -\vec{a}$, $\vec{CA} = -(\vec{a} + \vec{b})$ であるから

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = -(\vec{a} + \vec{b})$$

すなわち, $-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$ である.

問 5

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{与式} &= 2\vec{a} - 6\vec{b} - 3\vec{a} + 3\vec{b} \\ &= -\vec{a} - 3\vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \text{与式} &= \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} - 2\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c} \\ &= -\vec{a} + \vec{c} \end{aligned}$$

問 6

$$\begin{aligned} 3\vec{a} - \vec{b} - \vec{x} &= 2\vec{x} - 3\vec{a} + 2\vec{b} \\ -\vec{x} - 2\vec{x} &= -3\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{a} + \vec{b} \\ -3\vec{x} &= -6\vec{a} + 3\vec{b} \\ \vec{x} &= -\frac{1}{3}(-6\vec{a} + 3\vec{b}) \\ &= 2\vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

問 7

$\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$ であるから, 与えられたベクトルは, \vec{a} と同じ向きであり, その大きさは

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| &= \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| |\vec{a}| \\ &= \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1 \end{aligned}$$

よって, これは単位ベクトルである.

したがって, $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ は, \vec{a} と同じ向きの単位ベクトルとなる.

問 8

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{与式} &= 3(-1, 2) - 2(3, -1) \\ &= (-3, 6) - (6, -2) \\ &= (-3 - 6, 6 - (-2)) = (-9, 8) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} |3\vec{c} - 2\vec{d}| &= \sqrt{(-9)^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{81 + 64} = \sqrt{145} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \text{与式} &= (-1, 2) + \frac{1}{2}(3, -1) \\
 &= (-1, 2) + \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(-1 + \frac{3}{2}, 2 - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 \left|\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\right| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} \\
 &= \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \text{与式} &= -\frac{1}{3}(-1, 2) + \frac{1}{2}(3, -1) \\
 &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}, -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{11}{6}, -\frac{7}{6}\right)
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 \left|\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\right| &= \sqrt{\left(\frac{11}{6}\right)^2 + \left(-\frac{7}{6}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{121}{36} + \frac{49}{36}} \\
 &= \sqrt{\frac{170}{36}} = \frac{\sqrt{170}}{6}
 \end{aligned}$$

問 9

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \overrightarrow{AB} &= (3, 5) - (4, 0) \\
 &= (3 - 4, 5 - 0) = (-1, 5) \\
 \text{よって} \\
 |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(-1)^2 + 5^2} \\
 &= \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \overrightarrow{BC} &= (-1, 3) - (3, 5) \\
 &= (-1 - 3, 3 - 5) = (-4, -2) \\
 \text{よって} \\
 |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} \\
 &= \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \overrightarrow{CA} &= (4, 0) - (-1, 3) \\
 &= (4 + 1, 0 - 3) = (5, -3) \\
 \text{よって} \\
 |\overrightarrow{CA}| &= \sqrt{5^2 + (-3)^2} \\
 &= \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}
 \end{aligned}$$

問 10

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} &= (3, 2) - (1, 1) \\
 &= (3 - 1, 2 - 1) = (2, 1) \\
 \overrightarrow{AC} &= (x, y) - (1, 1) \\
 &= (x - 1, y - 1) \\
 \overrightarrow{AC} &= k\overrightarrow{AB} \text{ より} \\
 (x - 1, y - 1) &= k(2, 1) \\
 &= (2k, k)
 \end{aligned}$$

$$\text{これより, } \begin{cases} x - 1 = 2k \quad \dots \textcircled{1} \\ y - 1 = k \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{また, } |\overrightarrow{AC}| = 5 \text{ より, } |\overrightarrow{AC}|^2 &= 25 \\
 \text{すなわち, } (x - 1)^2 + (y - 1)^2 &= 25 \quad \dots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

①, ② を ③ に代入して

$$(2k)^2 + k^2 = 25$$

$$5k^2 = 25$$

$$k^2 = 5$$

k は正の実数なので, $k = \sqrt{5}$

これを, ①, ② に代入して

$$x = 1 + 2\sqrt{5}$$

$$y = 1 + \sqrt{5}$$

よって, 点 C の座標は, $(1 + 2\sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$

問 11

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi \\
 &= 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \\
 &= 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

問 12

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, \vec{i} と \vec{i} , \vec{j} と \vec{j} のなす角は 0 であり, \vec{i} と \vec{j} のなす角は $\frac{\pi}{2}$ であるから

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

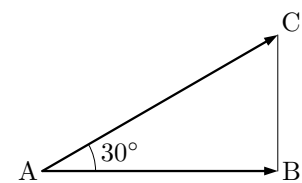
$$= 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

よって, $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$

問 13

$$AB = \sqrt{3}, \quad AC = 2$$

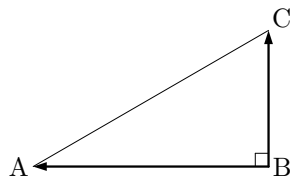
(1) \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} のなす角は 30° である.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

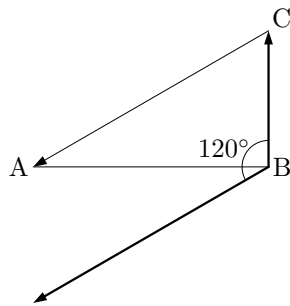
$$= \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

(2) \overrightarrow{BA} と \overrightarrow{BC} のなす角は 90° である.



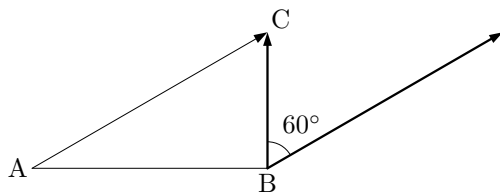
$$\begin{aligned}\vec{BA} \cdot \vec{BC} &= \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \\ &= \sqrt{3} \cdot 1 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

(3) \vec{BC} と \vec{CA} のなす角は 120° である.



$$\begin{aligned}\vec{BC} \cdot \vec{CA} &= 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1\end{aligned}$$

(4) \vec{BC} と \vec{AC} のなす角は 60° である.



$$\begin{aligned}\vec{BC} \cdot \vec{AC} &= 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

問 14

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 1$
 $= 6 - 4 = 2$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot (-3)$
 $= 3 - 3 = 0$

問 15

\vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とする.

(1) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2}$
 $= \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
 $|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$
 $= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1)$
 $= -3 - 2 = -5$

したがって

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} \\ &= -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \leq \theta \leq \pi \text{ より, } \theta &= \frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

(2) $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2}$
 $= \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$
 $|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2}$
 $= \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 6 + 1 \cdot (-3)$
 $= -12 + 3 = -15$

したがって

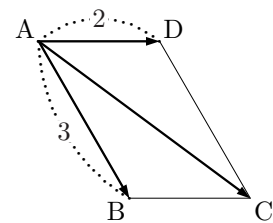
$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{-15}{\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}} \\ &= -\frac{15}{15} = -1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \text{ より, } \theta &= \pi\end{aligned}$$

問 16

(1) 与式 $= \vec{a} \cdot 2\vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot 2\vec{a} - 3\vec{b} \cdot \vec{b}$
 $= 2|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2$
 $= 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 5 \cdot (-1) - 3 \cdot 2^2$
 $= 4 + 5 - 12 = -3$

(2) 与式 $= (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$
 $= 2\vec{a} \cdot 2\vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot 2\vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$
 $= 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$
 $= 4 \cdot (\sqrt{2})^2 - 4 \cdot (-1) + 2^2$
 $= 8 + 4 + 4 = 16$

問 17



$$\begin{aligned}|\vec{AB}| &= 3, |\vec{AD}| = 2 \\ \vec{AB} \cdot \vec{AD} &= 3 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3\end{aligned}$$

ここで, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ であるから

$$\begin{aligned}|\vec{AC}|^2 &= |\vec{AB} + \vec{AD}|^2 \\ &= |\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + |\vec{AD}|^2 \\ &= 3^2 + 2 \cdot 3 + 2^2 \\ &= 9 + 6 + 4 = 19\end{aligned}$$

$|\vec{AC}| > 0$ であるから, $|\vec{AC}| = \sqrt{19}$

問 18

ベクトルの平行条件より, $\vec{b} = m\vec{a}$ となる実数 m が存在するから

$$(1, k) = m(-2, k+3)$$

これより, $\begin{cases} 1 = -2m & \dots \text{①} \\ k = m(k+3) & \dots \text{②} \end{cases}$

① より, $m = -\frac{1}{2}$

これを ② に代入して

$$k = -\frac{1}{2}(k+3)$$

$$2k = -k-3$$

$$3k = -3$$

よって, $k = -1$

問 19

$$\overrightarrow{AB} = (5, 4) - (3, 1)$$

$$= (2, 3)$$

$$\overrightarrow{CD} = (k, 3) - (1, k)$$

$$= (k-1, 3-k)$$

ベクトルの平行条件より, $\overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{AB}$ となる実数 m が存在するから

$$(k-1, 3-k) = m(2, 3)$$

これより, $\begin{cases} k-1 = 2m & \dots \textcircled{1} \\ 3-k = 3m & \dots \textcircled{2} \end{cases}$

① $\times 3 -$ ② $\times 2$ より

$$3(k-1) - 2(3-k) = 0$$

$$3k - 3 - 6 + 2k = 0$$

$$5k = 9$$

よって, $k = \frac{9}{5}$

問 20

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= 4 \cdot (\sqrt{6})^2 - 4 \cdot (-2) + (\sqrt{3})^2$$

$$= 24 + 8 + 3 = 35 \neq 0$$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$

$$= (\sqrt{6})^2 + 4 \cdot (-2) + 4 \cdot (\sqrt{3})^2$$

$$= 6 - 8 + 12 = 10 \neq 0$$

よって, $2\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} + 2\vec{b} \neq \vec{0}$

$2\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{a} + 2\vec{b}$ の内積を求めると

$$(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - 2|\vec{b}|^2$$

$$= 2|\vec{a}|^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2$$

$$= 2 \cdot (\sqrt{6})^2 + 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (\sqrt{3})^2$$

$$= 12 - 6 - 6 = 0$$

よって, $2\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{a} + 2\vec{b}$ は直交する.

問 21

ベクトルの垂直条件より, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ であるから

$$-(7+k) + 3 \cdot 5k = 0$$

$$-7 - k + 15k = 0$$

$$14k = 7$$

$$k = \frac{1}{2}$$

このとき, $\vec{b} = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) \neq \vec{0}$

よって, $k = \frac{1}{2}$

問 22

$$\overrightarrow{OP} = (1, k) - (0, 0)$$

$$= (1, k)$$

$$\overrightarrow{AP} = (1, k) - (8, 6)$$

$$= (-7, k-6)$$

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AP}$ のとき, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ であるから

$$1 \cdot (-7) + k(k-6) = 0$$

$$-7 + k^2 - 6k = 0$$

$$k^2 - 6k - 7 = 0$$

$$(k+1)(k-7) = 0$$

よって, $k = -1, 7$

問 23

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{2+3} = \frac{3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{5}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{3+1} = \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{4}$$

$\overrightarrow{OA} = (-1, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (3, 4)$ であるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{5}$$

$$= \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{3}{5}(-1, 2) + \frac{2}{5}(3, 4)$$

$$= \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right) + \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

$$= \left(-\frac{3}{5} + \frac{6}{5}, \frac{6}{5} + \frac{8}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

よって, 点 P の座標は, $\left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{1}{4}(-1, 2) + \frac{3}{4}(3, 4)$$

$$= \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{4}, 3\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{4} + \frac{9}{4}, \frac{1}{2} + 3\right) = \left(2, \frac{7}{2}\right)$$

よって, 点 Q の座標は, $\left(2, \frac{7}{2}\right)$

問 24

$\triangle ABC$ の重心は, 中線 AL を 2:1 に内分する点である.

点 L は, 線分 BC の中点だから点 L の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

よって, 重心 G の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OL}}{2+1}$$

$$= \frac{\overrightarrow{OA} + 2 \times \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}}{3}$$

$$= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

よって, $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$ である.

問 25

(1) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ であるから, 与えられた等式は

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

となる.

これより, $\vec{c} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$ であるから

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{b}$$

すなわち, $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$

$$\begin{aligned} (2) \quad \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\ &= \vec{c} - \vec{a} \\ &= (\vec{a} + 2\vec{b}) - \vec{a} = 2\vec{b} \\ \text{よって, } \overrightarrow{AC} &= 2\vec{b} \\ &= 2\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

であるから, $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{AC}$ である.

問 26

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\ &= (2, 3) - (4, 1) = (-2, 2) \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (1, 4) - (4, 1) = (-3, 3) \end{aligned}$$

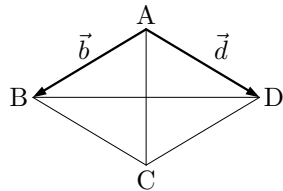
よって, $\overrightarrow{AC} = (-2, 2)$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3}(-3, 3) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

したがって, $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$ であるから, 3点 A, B, C は一直線上にある.

問 27

下の図のように, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする.



ひし形の定義より, $|\vec{b}| = |\vec{d}| \dots \textcircled{1}$

また, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$$= \vec{b} + \vec{d}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$

$$= -\vec{b} + \vec{d}$$

\overrightarrow{AC} と \overrightarrow{BD} の内積を求めると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\vec{b} + \vec{d}) \cdot (-\vec{b} + \vec{d}) \\ &= (\vec{d} + \vec{b}) \cdot (\vec{d} - \vec{b}) \\ &= |\vec{d}|^2 - |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

ここで, $\textcircled{1}$ より, $|\vec{b}|^2 = |\vec{d}|^2$ であるから, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ であるから, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ すなわち, $AC \perp BD$ である.

問 28

(1) 直線上の任意の点の座標を (x, y) , t を実数とすると

$$(x, y) = (3, 1) + t(2, 4)$$

$$= (3 + 2t, 1 + 4t)$$

成分を比較して

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$

(2) 直線上の任意の点の座標を (x, y) , t を実数とすると

$$(x, y) = (4, -1) + t(0, 4)$$

$$= (4, -1 + 4t)$$

成分を比較して

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 + 4t \end{cases}$$

任意の実数 t に対して, 常に $x = 4$ であるから, $y = -1 + 4t$ はなくてもよい.

(3) \overrightarrow{AB} を方向ベクトルと考える.

$$\overrightarrow{AB} = (6, 4) - (3, 5) = (3, -1)$$

点 A を通り, $(3, -1)$ を方向ベクトルとする直線上の任意の点の座標を (x, y) , t を実数とすると

$$(x, y) = (3, 5) + t(3, -1)$$

$$= (3 + 3t, 5 - t)$$

成分を比較して

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 5 - t \end{cases}$$

この解答以外にも, 点 B を通り, $(3, -1)$ を方向ベクトルとする直線を考えれば

$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases}$$

点 A を通り, $\overrightarrow{BA} = (-3, 1)$ を方向ベクトルとすれば

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$$

点 B を通り, $\overrightarrow{BA} = (-3, 1)$ を方向ベクトルとすれば

$$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$$

問 29

(1) (3, 4)

(2) $y = \frac{3}{5}x + 2$ より, $5y = 3x + 10$, すなわち, $3x - 5y + 10 = 0$ であるから

$$(3, -5)$$

問 30

$$(1) \quad \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

(2) $y = 3x + 2$ より, $3x - y + 2 = 0$ であるから

$$\frac{|3 \cdot (-2) - 1 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

問 31

(1) 点 A を通り, $\overrightarrow{AB} = (3, -1) - (-1, 2) = (4, -3)$ を方向ベクトルとする直線の式を求めればよい.

直線上の任意の点の座標を (x, y) , t を実数とすると

$$(x, y) = (-1, 2) + t(4, -3)$$

$$= (-1 + 4t, 2 - 3t)$$

成分を比較して

$$\begin{cases} x = -1 + 4t & \dots \textcircled{1} \\ y = 2 - 3t & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① より, $t = \frac{x+1}{4}$

② より, $t = \frac{y-2}{-3}$

よって, $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-3}$

$$-3(x+1) = 4(y-2)$$

$$-3x - 3 = 4y - 8$$

したがって, $3x + 4y - 5 = 0$

[別解]

求める方程式は

$$y - 2 = \frac{-1 - 2}{3 - (-1)} \{x - (-1)\}$$

$$y - 2 = -\frac{3}{4}(x + 1)$$

$$4(y - 2) = -3(x + 1)$$

$$4y - 8 = -3x - 3$$

よって, $3x + 4y - 5 = 0$

(2) 点 C と直線 AB との距離を d とすると

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

(3) $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot d$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\{3 - (-1)\}^2 + \{-1 - 2\}^2} \cdot 2$$

$$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

問 32

(1) $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ とおくと

$$(5, 14) = m(0, -2) + n(-1, -3)$$

$$= (-n, -2m - 3n)$$

成分を比較して

$$\begin{cases} 5 = -n & \dots \textcircled{1} \\ 14 = -2m - 3n & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① より, $n = -5$

これを ② に代入して

$$-2m - 3 \cdot (-5) = 14$$

$$-2m + 15 = 14$$

$$-2m = -1$$

$$m = \frac{1}{2}$$

よって, $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - 5\vec{b}$

(2) $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b}$ とおくと

$$(-3, 23) = m(0, -2) + n(-1, -3)$$

$$= (-n, -2m - 3n)$$

成分を比較して

$$\begin{cases} -3 = -n & \dots \textcircled{1} \\ 23 = -2m - 3n & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① より, $n = 3$

これを ② に代入して

$$-2m - 3 \cdot 3 = 23$$

$$-2m - 9 = 23$$

$$-2m = 32$$

$$m = -16$$

よって, $\vec{d} = -16\vec{a} + 3\vec{b}$

問 33

(1) \vec{a}, \vec{b} が線形独立であるから

$$\begin{cases} 1 = 2y - 1 & \dots \textcircled{1} \\ 2x = 6 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① より, $y = 1$

② より, $x = 3$

よって, $x = 3, y = 1$

(2) 右辺 = $2x\vec{a} + x\vec{b} - y\vec{a} + \vec{b}$

$$= (2x - y)\vec{a} + (x + 1)\vec{b}$$

よって, $x\vec{a} + 2y\vec{b} = (2x - y)\vec{a} + (x + 1)\vec{b}$

\vec{a}, \vec{b} が線形独立であるから

$$\begin{cases} x = 2x - y & \dots \textcircled{1} \\ 2y = x + 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① より, $x = y$

これを ② に代入して

$$2x = x + 1$$

$$x = 1$$

よって, $y = 1$

したがって, $x = 1, y = 1$

問 34

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ とする.

点 L は線分 AB を 2 : 3 に内分する点なので

$$\vec{OL} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{3 + 2}$$

$$= \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

点 P は線分 OL 上にあるので, $\vec{OP} = s\vec{OL}$ となる実数 s が存在するから

$$\vec{OP} = s \left(\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \right)$$

$$= \frac{3s}{5}\vec{a} + \frac{2s}{5}\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

また, 点 P は線分 AM 上にあるので, 実数 t を用いて, $\vec{AP} = t\vec{AM}$ とおけば

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$= \vec{OA} + t\vec{AM}$$

$$= \vec{OA} + t(\vec{OM} - \vec{OA})$$

$$= (1 - t)\vec{OA} + t\vec{OM}$$

ここで, 点 M は線分 OB の中点だから, $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{b}$

したがって, $\vec{OP} = (1 - t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$

①, ② より

$$\frac{3s}{5}\vec{a} + \frac{2s}{5}\vec{b} = (1 - t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b}$$

\vec{a}, \vec{b} は線形独立なので

$$\begin{cases} \frac{3s}{5} = 1 - t \\ \frac{2s}{5} = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} 3s + 5t = 5 & \dots \textcircled{1} \\ 4s = 5t & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

②を①に代入して

$$3s + 4s = 5$$

$$s = \frac{5}{7}$$

これを②に代入して

$$4 \cdot \frac{5}{7} = 5t$$

$$5t = \frac{20}{7}$$

$$t = \frac{4}{7}$$

したがって、 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AM} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AM}$ となるので

$$\mathbf{AP : PM = 4 : 3}$$

