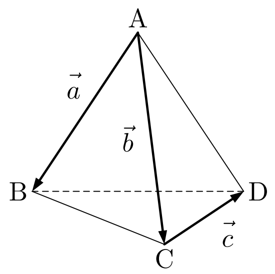
練習問題 2-A

1.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DB}} &= \overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{CD}} + (-\overrightarrow{\mathrm{AC}}) + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= -\vec{c} - \vec{b} + \vec{a}\\ &= \boldsymbol{\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}}\end{aligned}$$

2.　四角形 ABCD が平行四辺形になるためには，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ となればよい．

点 D の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (0,\ 3,\ 7) - (2,\ 5,\ 1) = (-2, -2,\ 6)$

$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = (6,\ 0,\ 4) - (x,\ y,\ z) = (6 - x,\ -y,\ 4 - z)$

よって

$$\begin{cases} -2 = 6 - x \\ -2 = -y \\ 6 = 4 - z \end{cases}$$

これを解いて，$x = 8,\ y = 2,\ z = -2$

したがって，D の座標は，$\mathbf{(8,\ 2,\ -2)}$

3.　3 点が一直線上にあれば，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k が存在する．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (a,\ b, -5) - (-3,\ 2, -1)\\ &= (a + 3,\ b - 2,\ -5 + 1) = (a + 3,\ b - 2,\ -4)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, -5,\ 3) - (-3,\ 2, -1) = (5, -7,\ 4)$

よって，$(a + 3,\ b - 2,\ -4) = k(5, -7,\ 4)$ であるから

$$\begin{cases} a + 3 = 5k & \cdots ① \\ b - 2 = -7k & \cdots ② \\ -4 = 4k & \cdots ③ \end{cases}$$

③より，$k = -1$

①，②に代入して

$a = 5 \cdot (-1) - 3 = -8$

$b = -7 \cdot (-1) + 2 = 9$

したがって，$\boldsymbol{a = -8,\ b = 9}$

4.
$$\begin{cases} 3\vec{x} + \vec{y} = \vec{a} & \cdots ① \\ 7\vec{x} + 3\vec{y} = \vec{b} & \cdots ② \end{cases}$$
とする．

$$\begin{array}{llrl} ① \times 3 & & 9\vec{x} + 3\vec{y} & = 3\vec{a} \\ ② & -) & 7\vec{x} + 3\vec{y} & = \vec{b} \\ \hline & & 2\vec{x} & = 3\vec{a} - \vec{b} \end{array}$$

よって，$\vec{x} = \dfrac{3}{2}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$

このとき，①より

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \vec{a} - 3\vec{x}\\ &= \vec{a} - 3\left(\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\\ &= \vec{a} - \frac{9}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\\ &= -\frac{7}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{3}{2}(-2, -1,\ 3) - \frac{1}{2}(1,\ 3,\ 2)\\ &= \left(-3, -\frac{3}{2},\ \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 1\right)\\ &= \left(-3 - \frac{1}{2},\ -\frac{3}{2} - \frac{3}{2},\ \frac{9}{2} - 1\right)\\ &= \boldsymbol{\left(-\frac{7}{2},\ -3,\ \frac{7}{2}\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{y} &= -\frac{7}{2}(-2, -1,\ 3) + \frac{3}{2}(1,\ 3,\ 2)\\ &= \left(7,\ \frac{7}{2},\ -\frac{21}{2}\right) + \left(\frac{3}{2},\ \frac{9}{2},\ 3\right)\\ &= \left(7 + \frac{3}{2},\ \frac{7}{2} + \frac{9}{2},\ -\frac{21}{2} + 3\right)\\ &= \boldsymbol{\left(\frac{17}{2},\ 8, -\frac{15}{2}\right)}\end{aligned}$$

5.　与えられた直線の方向ベクトルを $\vec{v}$ とすると

$\vec{v} = (2, 1, -3)$

求める直線も $\vec{v}$ を方向ベクトルとするので

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= (-1,\ 4,\ 7) + t(2, 1, -3)\\ &= (-1 + 2t,\ 4 + t,\ 7 - 3t)\end{aligned}$$

よって

$\boldsymbol{x = -1 + 2t,\ y = 4 + t,\ z = 7 - 3t}\quad \cdots ①$

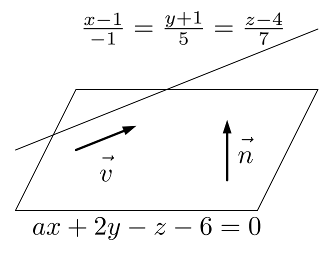
または，①の 3 式を t について解いて

$t = \dfrac{x + 1}{2},\ t = y - 4,\ t = \dfrac{z - 7}{-3}$

t を消去すると

$$\boldsymbol{\frac{x + 1}{2} = y - 4 = \frac{z - 7}{-3}}$$

6.



与えられた平面の法線ベクトルを $\vec{n}$ とすると

$\vec{n} = (a,\ 2, -1)$

また，与えられた直線の方向ベクトルを $\vec{v}$ とすると

$\vec{v} = (-1,\ 5,\ 7)$

平面と直線が平行となるためには $\vec{n} \perp \vec{v}$，すなわち，$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ となればよい．

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{v} &= a \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 7\\ &= -a + 10 - 7\\ &= -a + 3 = 0\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a = 3}$

7.　点 $(2,\ -1,\ 6)$ を通り，ベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ に垂直な平面の方

程式は

$3(x-2)+1(y+1)-1(z-6)=0$

整理すると，$3x+y-z+1=0\cdots$①

$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=z=t$ とすると

$x=-t,\ \ y=2t+1,\ \ z=t\ \ \cdots$②

これを①に代入すると

$-3t+(2t+1)-t+1=0$

$-2t=-2$

$t=1$

②に代入して

$x=-1,\ \ y=2\cdot1+1=3,\ \ z=1$

よって，交点は $\boldsymbol{(-1,\ 3,\ 1)}$

8. 直線の方程式は

$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-4}{2}\cdots$①

また，球の方程式は

$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=6^2\cdots$②

①において，$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-4}{2}=t$ とおくと

$x=2t+3,\ \ y=t-1,\ \ z=2t+4\cdots$③

③を②に代入すると

$(2t+3-3)^2+(t-1+1)^2+(2t+4-4)^2=36$

$(2t)^2+t^2+(2t)^2=36$

$4t^2+t^2+4t^2=36$

$9t^2=36$

$t^2=4$

$t=\pm2$

これを，③に代入する．

i）$t=2$ のとき

$x=2\cdot2+3=7$

$y=2-1=1$

$z=2\cdot2+4=8$

ii）$t=-2$ のとき

$x=2\cdot(-2)+3=-1$

$y=-2-1=-3$

$z=2\cdot(-2)+4=0$

よって，交点は，$\boldsymbol{(7,\ 1,\ 8)}$，$\boldsymbol{(-1,\ -3,\ 0)}$

練習問題 2-B

1. $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の内積を求めると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{BA}})+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}\\&=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}\\&=-\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\cos\angle\mathrm{ABC}+\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|\cos\angle\mathrm{DBC}\end{aligned}$$

ここで，$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{DBC}$ より，$\mathrm{BA}=\mathrm{BD}$，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DBC}$ であるから

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|,\quad \cos\angle\mathrm{ABC}=\cos\angle\mathrm{DBC}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$ となるので，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は垂直である．

2. 求める平面の方程式を，$ax+by+cz+d=0\cdots$① とし，この平面上にある 3 点を求める．

直線 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z+3}{-5}$ は，求める平面に含まれるので，点 $(1,\ -2,\ -3)$ は求める平面上の点である．

同様に，直線 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$ も，求める平面に含まれるので，点 $(-1,\ 0,\ 1)$ も求める平面上の点である．

3 点目を求めるために，$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z+3}{-5}=t$ とおくと

$x=1+3t,\ \ y=-2+4t,\ \ z=-3-5t$

となるので，$t=1$ とおけば

$x=1+3=4$

$y=-2+4=2$

$z=-3-5=-8$

よって，点 $(4,\ 2,\ -8)$ も求める平面上の点である．

3 点の座標を ① に代入して

$$\begin{cases}a-2b-3c+d=0 & \cdots② \\ -a+c+d=0 & \cdots③ \\ 4a+2b-8c+d=0 & \cdots④\end{cases}$$

② + ④ より，$5a-11c+2d=0\cdots$⑤

$$\begin{array}{lrrrl}③\times5 & & -5a & +5c+5d & =0\\ ⑤ & +) & 5a & -11c+2d & =0\\ \hline & & & -6c+7d & =0\end{array}$$

これより，$c=\dfrac{7}{6}d$

これを ③ に代入して

$-a+\dfrac{7}{6}d+d=0$

$a=\dfrac{13}{6}d$

② より，$2b=a-3c+d$ であるから

$$\begin{aligned}b&=\frac{1}{2}(a-3c+d)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{6}d-3\cdot\frac{7}{6}d+d\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{13-21+6}{6}d\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{6}d=-\frac{1}{6}d\end{aligned}$$

以上より，求める平面の方程式は

$\dfrac{13}{6}dx-\dfrac{1}{6}dy+\dfrac{7}{6}dz+d=0$

$d=0$ とすると，$a=b=c=0$ となるので，$d\fallingdotseq0$ である．

よって，$\dfrac{13}{6}x-\dfrac{1}{6}y+\dfrac{7}{6}z+1=0$

すなわち，$\boldsymbol{13x-y+7z+6=0}$

3.（1） 点 A は平面 α 上にあるので

$2x-3\cdot0+5z-1=0$，すなわち，$2x+5z=1$

また，点 A は平面 β 上にあるので

$2x+3\cdot0+z-5=0$，すなわち，$2x+z=5$

$\begin{cases}2x+5z=1\\2x+z=5\end{cases}$ を解いて

$\boldsymbol{x=3,\ z=-1}$

（2） 平面 α,β の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{n}_\alpha$，$\vec{n}_\beta$ とすると

$\vec{n}_\alpha=(2,-3,\ 5)$

$\vec{n}_\beta=(2,\ 3,\ 1)$

求めるベクトルを，$\vec{x}=(x,\ y,\ z)$ とする．

$\vec{x}\perp\vec{n}_\alpha$ であるから，$\vec{x}\cdot\vec{n}_\alpha$

すなわち，$2x-3y+5z=0\cdots$①

$\vec{x}\perp\vec{n}_\beta$ であるから，$\vec{x}\cdot\vec{n}_\beta$

すなわち，$2x+3y+z=0\cdots$②

①＋② より，$4x+6z=0$ であるから，$x=-\dfrac{3}{2}z$

これを ② に代入して

$$2\cdot\left(-\frac{3}{2}z\right)+3y+z=0$$
$$-3z+3y+z=0$$
$$3y=2z$$
$$y=\frac{2}{3}z$$

よって，求めるベクトルは

$$\left(-\frac{3}{2}z,\ \frac{2}{3}z,\ z\right)=\frac{1}{6}z(-9,\ 4,\ 6)$$

$\dfrac{1}{6}z=k$ とおいて

$\boldsymbol{\vec{x}=k(-9,\ 4,\ 6)}$ （k は 0 ではない任意の実数）

（3） $(-9,\ 4,\ 6)$ は求める直線の方向ベクトルであり，この直線は点 $(3,\ 0,\ -1)$ を通るので，直線上の任意の点を $(x,\ y,\ z)$ とすれば

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z)&=(3,\ 0,\ -1)+t(-9,\ 4,\ 6)\\&=(3-9t,\ 4t,\ -1+6t)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=3-9t}\\\boldsymbol{y=4t}\\\boldsymbol{z=-1+6t}\end{cases}$$

4. （1） xy 平面の方程式は，$z=0$ であるから，これを球の方程式に代入すると

$$x^2+y^2+0^2-6x+8y-4\cdot0-20=0$$
$$x^2-6x+y^2+8y-20=0$$
$$(x-3)^2-9+(y+4)^2-16-20=0$$
$$(x-3)^2+(y+4)^2=45$$

よって，xy 平面上の図形の方程式は

$$(x-3)^2+(y+4)^2=(3\sqrt{5})^2,\ z=0$$

したがって

円の中心は $\boldsymbol{(3,\ -4,\ 0)}$，半径は $\boldsymbol{3\sqrt{5}}$

（2） x 軸上の点は $(x,\ 0,\ 0)$ となるので，$y=0,\ z=0$ を球の方程式に代入すると

$$x^2+0^2+0^2-6x+8\cdot0-4\cdot0-20=0$$
$$x^2-6x-20=0$$
$$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot(-20)}}{1}$$
$$=3\pm\sqrt{29}$$

よって，球と x 軸との交点の座標は

$$(3+\sqrt{29},\ 0,\ 0),(3-\sqrt{29},\ 0,\ 0)$$

この 2 点間の距離が，球が x 軸から切り取る線分の長さとなる．

したがって，$3+\sqrt{29}-(3-\sqrt{29})=\boldsymbol{2\sqrt{29}}$

5. 題意より

$$|\vec{a}|=3,\ \ |\vec{b}|=2,\ \ |\vec{c}|=2$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=4\cdot\frac{1}{2}=2$$
$$\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}=6\cdot\frac{1}{2}=3$$

$(\vec{c}-l\vec{a}-m\vec{b})\perp\vec{a}$ より，$(\vec{c}-l\vec{a}-m\vec{b})\cdot\vec{a}=0$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{c}\cdot\vec{a}-l\vec{a}\cdot\vec{a}-m\vec{b}\cdot\vec{a}&=3-l|a|^2-m\cdot0\\&=3-l\cdot3^2\\&=3-9l=0\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{l=\dfrac{1}{3}}$

また，$(\vec{c}-l\vec{a}-m\vec{b})\perp\vec{b}$ より，$(\vec{c}-l\vec{a}-m\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{c}\cdot\vec{b}-l\vec{a}\cdot\vec{b}-m\vec{b}\cdot\vec{b}&=2-l\cdot0-m|b|^2\\&=2-m\cdot2^2\\&=2-4m=0\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{m=\dfrac{1}{2}}$

6. $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0}$ が成り立つとき

$\vec{a}\cdot(l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{0}=0$ であるから

$$l\vec{a}\cdot\vec{a}+m\vec{a}\cdot\vec{b}+n\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$
$$l|\vec{a}|^2+m\cdot0+n\cdot0=0$$
$$l|\vec{a}|^2=0$$

ここで，$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$ より，$|\vec{a}|\fallingdotseq0$ なので，$l=0$

同様にして，$\vec{b}\cdot(l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c})=0$ より，$m|\vec{b}|^2=0,\ \ |\vec{b}|\fallingdotseq0$ であるから，$m=0$

$\vec{c}\cdot(l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c})=0$ より，$n|\vec{c}|^2=0,\ \ |\vec{c}|\fallingdotseq0$ であるから，$n=0$

以上より，$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0}$ が成り立つとき，$l=m=n=0$ となるので，$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ は線形独立である．

∎