2章　行列

問1

（1）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x+3y=4 & \cdots ① \\ \quad\ y=-2 & \cdots ② \end{cases}$$

② の $y=-2$ を ① に代入すると

$x-6=4$ より，$x=10$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y)=(10,\ -2)}$

（2）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 7 \\ -1 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 3 & 12 \\ 0 & -24 & -7 & -37 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -24 & -7 & -37 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x+5y+2z & = & 7 & \cdots ① \\ \quad y+\dfrac{1}{3}z & = & \dfrac{4}{3} & \cdots ② \\ \qquad\quad z & = & -5 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ の $z=-5$ を ② に代入すると

$y+\dfrac{1}{3}\cdot(-5)=\dfrac{4}{3}$ より，$y=\dfrac{9}{3}=3$

$z=-5,\ y=3$ を ① に代入すると

$x+5\cdot 3+2\cdot(-5)=7$ より，$x=7-15+10=2$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ -5)}$

問2

（1）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x+2y=-1 & \cdots ① \\ 0x+0y=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② はどのような $x,\ y$ に対しても成り立つから，これを省略して

$x+2y=-1$

$y=t$ とおくと，$x=-2t-1$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y)=(-2t-1,\ t)}$　**(t は任意の数)**

（2）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 9 & 8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 9 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 7 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 9 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2} & -5 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & -10 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & -10 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x+\dfrac{3}{4}y+\dfrac{1}{2}z & = & 1 & \cdots ① \\ \qquad y+2z & = & 4 & \cdots ② \\ 0x+0y+0z & = & -16 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ は，どのような $x,\ y,\ z$ に対しても成り立たない．したがってこの連立方程式の**解はない．**

問3

（1）

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

よって，逆行列は，$\boldsymbol{\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$

（2）

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

よって，逆行列は，$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}}$

（3）
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

よって，逆行列は，$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

問 4

（1）　$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，与えられた方程式は，$A\vec{x} = \vec{b}$ と表すことができる．

ここで，A の逆行列を求めると
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

よって，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ であるから
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 \cdot 7 + 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 7 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 \\ 10 \cdot 7 + 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 49 - 12 \\ 21 - 6 \\ 70 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 15 \\ 55 \end{pmatrix}$$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (37,\ 15,\ 55)}$

（2）　$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおくと，与えられた方程式は，$A\vec{x} = \vec{b}$ と表すことができる．

ここで，A の逆行列は，（1）より，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ であるから
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 \cdot (-4) + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \\ 10 \cdot (-4) + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -28 + 20 + 4 \\ -12 + 10 + 2 \\ -40 + 25 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-4,\ 0,\ -9)}$

問 5　それぞれの行列を A として，消去法を行う．

（1）
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{rank}\boldsymbol{A = 2}$

（2）
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{rank}\boldsymbol{A = 1}$

問 6 それぞれの 3 次正方行列を A として，消去法を行う．

（1）
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank} A = 3$ であるから，A は**正則である．**

（2）
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank} A = 2 < 3$ であるから，A は**正則ではない．**

∎