練習問題 2-A

1.　それぞれの行列を A とする．

（1）　$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$

小行列式を求めると

$D_{11} = 2 \quad D_{12} = 3$

$D_{13} = 4 \quad D_{21} = 5$

以上より

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

よって，$\boldsymbol{A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}$

（2）　$$|A| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -35 - 35 - 35 - (-125 + 1 + 343) = -324$$

小行列式を求めると

$D_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -18 \quad D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 36$

$D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -54 \quad D_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 36$

$D_{22} = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -54 \quad D_{23} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 18$

$D_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -54 \quad D_{32} = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 18$

$D_{33} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -36$

以上より

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -18 & -36 & -54 \\ -36 & -54 & -18 \\ -54 & -18 & -36 \end{pmatrix}$$

よって

$$\boldsymbol{A^{-1}} = -\frac{1}{324}\begin{pmatrix} -18 & -36 & -54 \\ -36 & -54 & -18 \\ -54 & -18 & -36 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{-18}{324}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

2.（1）　与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ここで，$A = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とすると

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 18 - (-24) = 42$$

また

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 12 - (-72) = 84$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 81 - 18 = 63$$

よって，クラメルの公式より

$x = \frac{84}{42} = 2,\ \ y = \frac{63}{42} = \frac{3}{2}$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y) = \left(2,\ \frac{3}{2}\right)}$

（2）　与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで，$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ とすると

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -6 + 2 + 2 - (-8 + 3 + 1) = 2$$

また

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 - (4 + 3) = -2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 - (-3 - 1) = 8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 2 - (-4 + 1) = 6$$

よって，クラメルの公式より

$x = \frac{-2}{2} = -1,\ \ y = \frac{8}{2} = 4,\ \ z = \frac{6}{2} = 3$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-1,\ 4,\ 3)}$

3.　与えられた3つのベクトルを並べてできる行列式の値が0となればよいので

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & a \end{vmatrix} = -4a - 15 + 16 - (6 + 4a + 40)$$

$$= -8a - 45 = 0$$

すなわち，$\boldsymbol{a = -\frac{45}{8}}$

4.　$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3つのベクトルを並べてできる行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -4 & -8 \\ -2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 8-32+48-(32-16+24) = -16$$

よって，平行六面体の体積は，$|-16| = \mathbf{16}$

5.　4点A，B，C，Dが同じ平面上にあれば，3つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}$は線形従属となるから，これら3つのベクトルを並べてできる行列式の値が0となればよい．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & a-2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2-2-\{-2-2(a-2)\}$$

$$= -(-2a+2) = 2a-2 = 0$$

したがって，$\boldsymbol{a = 1}$

6.　△ABCの面積は，線分AB，ACを隣り合う2辺とする平行四辺形の面積の$\dfrac{1}{2}$である．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1-a_1 \\ c_2-a_2 \end{pmatrix}$$

したがって，AB，ACを隣り合う2辺とする平行四辺形の面積は，行列式$\begin{vmatrix} b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ b_2-a_2 & c_2-a_2 \end{vmatrix}$の絶対値に等しいから，△ABCの面積は，$\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ b_2-a_2 & c_2-a_2 \end{vmatrix}$の絶対値に等しい．

一方

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ a_2 & b_2-a_2 & c_2-a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ b_2-a_2 & c_2-a_2 \end{vmatrix}$$

であるから，この値の絶対値は，△ABCの面積に等しい．

練習問題 2-B

1. （1）　方程式を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

係数行列をAとすると

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= abc(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= abc(b-a)(c-a)\{(c+a)-(b+a)\}$$

$$= abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$= abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

また

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b^2 & c^2 \\ 1 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & b^2-b & c^2-c \\ 0 & b^3-b & c^3-c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b^2-b & c^2-c \\ b^3-b & c^3-c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b(b-1) & c(c-1) \\ b(b-1)(b+1) & c(c-1)(c+1) \end{vmatrix}$$

$$= bc(b-1)(c-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+1 & c+1 \end{vmatrix}$$

$$= bc(b-1)(c-1)\{(c+1)-(b+1)\}$$

$$= bc(b-1)(c-1)(c-b)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & c \\ a^2 & 1 & c^2 \\ a^3 & 1 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & c \\ a^2-a & 0 & c^2-c \\ a^3-a & 0 & c^3-c \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a^2-a & c^2-c \\ a^3-a & c^3-c \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a(a-1) & c(c-1) \\ a(a-1)(a+1) & c(c-1)(c+1) \end{vmatrix}$$

$$= -ac(a-1)(c-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & c+1 \end{vmatrix}$$

$$= -ac(a-1)(c-1)\{(c+1)-(a+1)\}$$

$$= ac(a-1)(c-1)(a-c)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a^2 & b^2 & 1 \\ a^3 & b^3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a^2-a & b^2-b & 0 \\ a^3-a & b^3-b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2-a & b^2-b \\ a^3-a & b^3-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a(a-1) & b(b-1) \\ a(a-1)(a+1) & b(b-1)(b+1) \end{vmatrix}$$

$$= ab(a-1)(b-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & b+1 \end{vmatrix}$$

$$= ab(a-1)(b-1)\{(b+1)-(a+1)\}$$

$$= ab(a-1)(b-1)(b-a)$$

よって，クラメルの公式より

$$\boldsymbol{x}=\frac{bc(b-1)(c-1)(c-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\boldsymbol{\frac{(b-1)(c-1)}{a(a-b)(a-c)}}$$

$$\boldsymbol{y}=\frac{ac(a-1)(c-1)(a-c)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\boldsymbol{\frac{(a-1)(c-1)}{b(b-c)(b-a)}}$$

$$\boldsymbol{z}=\frac{ab(a-1)(b-1)(b-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\boldsymbol{\frac{(a-1)(b-1)}{c(c-b)(c-a)}}$$

（2） 方程式を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

係数行列を A とすると

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

また

$$\varDelta_1=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=|A|$$

$$\varDelta_2=\begin{vmatrix} a & a & c \\ b & b & a \\ c & c & b \end{vmatrix}=0 \quad (1\text{ 列}=2\text{ 列より})$$

$$\varDelta_2=\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ c & a & c \end{vmatrix}=0 \quad (1\text{ 列}=3\text{ 列より})$$

よって，クラメルの公式より

$$x=\frac{|A|}{|A|}=1,\quad y=\frac{0}{|A|}=0,\quad z=\frac{0}{|A|}=0$$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)}$

2. 余因子行列の性質より，$A\widetilde{A}=|A|E\cdots$① であるから

$$\left|A\widetilde{A}\right|=\left||A|E\right|$$

$$|A|\left|\widetilde{A}\right|=\left||A|E\right|=|A|^n|E| \quad (\text{各行から}|A|\text{をくくり出す.})=|A|^n$$

よって， $|A|\left|\widetilde{A}\right|=|A|^n\cdots$②

i）A が正則のとき，すなわち $|A|\neq 0$ のとき

②より，$\left|\widetilde{A}\right|=\dfrac{|A|^n}{|A|}=|A|^{n-1}$

ii）A が正則でないとき，すなわち $|A|=0$ のとき，① より，$A\widetilde{A}=O\cdots$①′

1）$A=O$ のとき

$\widetilde{A}=O$ となるから，$|A|=\left|\widetilde{A}\right|=0$ となり，これは $\left|\widetilde{A}\right|=|A|^{n-1}$ を満たす.

2）$A\neq O$ のとき

$\left|\widetilde{A}\right|\neq 0$ と仮定すると，$\widetilde{A}$ は正則であるから，逆行列 $\widetilde{A}^{-1}$ が存在する.

①′ の両辺に右から $\widetilde{A}^{-1}$ をかけると

$$A=O\,\widetilde{A}^{-1}=O$$

これは，$A\neq O$ に矛盾するから，$\left|\widetilde{A}\right|=0$ である.

よって，$|A|=\left|\widetilde{A}\right|=0$ となり，$\left|\widetilde{A}\right|=|A|^{n-1}$ を満たす.

以上より，$\left|\widetilde{A}\right|=|A|^{n-1}$ である.

3. （1） 4 点 O，A，B，P が同じ平面上にあるので，3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は線形従属である．よって，これら 3 つのベクトルを並べてできる行列式の値は 0 となる.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{より}$$

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ z & a_3 & b_3 \end{vmatrix}=0$$

（2）（1）の左辺を第 1 列に関して展開すると

$$x\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

すなわち

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}z=0$$

4. 与えられた連立方程式を整理すると

$$\begin{cases} (3-k)x+y+z=0 \\ x+(2-k)y=0 \\ x+(2-k)z=0 \end{cases}$$

この連立方程式を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} 3-k & 1 & 1 \\ 1 & 2-k & 0 \\ 1 & 0 & 2-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列の行列式の値が 0 となればよいので

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 & 1 \\ 1 & 2-k & 0 \\ 1 & 0 & 2-k \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&=(3-k)(2-k)^2-\{(2-k)+(2-k)\} \\
&=(3-k)(2-k)^2-2(2-k) \\
&=(2-k)\{(3-k)(2-k)-2\} \\
&=(2-k)(k^2-5k+4) \\
&=(2-k)(k-1)(k-4)=0
\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{k=1,\ 2,\ 4}$

i）$k=1$ のとき

係数行列は，$\begin{pmatrix} 3-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 0 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるから，これに行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0,\ -y+z=0$

$x=-y,\ z=y$ であるから，$y=t$ とおくと

$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(t,\ -t,\ -t)}$

ii）$k=2$ のとき

係数行列は，$\begin{pmatrix}3-2&1&1\\1&2-2&0\\1&0&2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ となるから，これに行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x+y+z=0,\ x=0$

$0+y+z=0$ より，$z=-y$ であるから，$y=t$ とおくと

$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(0,\ t,\ -t)}$

iii）$k=4$ のとき

係数行列は，$\begin{pmatrix}3-4&1&1\\1&2-4&0\\1&0&2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-2&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$

となるから，これに行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-2&0\\1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$-x+y+z=0,\ -y+z=0$

$z=y$，また，$-x+2y=0$ より，$x=2y$ であるから，$y=t$ とおくと

$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(2t,\ t,\ t)}$

∎