4章　行列の応用

練習問題 1-A

1.　f による $(x,\ y)$ の像を，$(x',\ y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx+0y \\ 0x+ky \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって，求める行列は

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}$$

または，$\boldsymbol{k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$，$\boldsymbol{kE}$　（E は単位行列）

2.　題意より

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\left\{\frac{1}{1-(-2)}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-1 & -4-1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}$$

3.　直線 $y = x$ 上の任意の点 $(x,\ x)$ の f による像を $(x',\ y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x+3x \\ -2x+4x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x \\ 2x \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 2x \end{cases}$$

2 式から x を消去すると

$$y' = \frac{1}{2}x'$$

したがって，像は直線　$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$

4.（1）　f の逆変換 f^{-1} を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6-5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

よって，f により，点 $(-3,\ 4)$ に移る点は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-4 \\ 15+12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10 \\ 27 \end{pmatrix}$$

すなわち点 $\boldsymbol{(-10,\ 27)}$ である．

（2）　$f\circ f$ により，点 $(1,\ -2)$ に移る点は，点 $(1,\ -2)$ を f^{-1} によって，2 回変換すればよいので

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+2 \\ -5-6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8+11 \\ -20-33 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 \\ -53 \end{pmatrix}$$

すなわち点 $\boldsymbol{(19,\ -53)}$ である．

5.　$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は，原点のまわりに θ だけ回転する線形変換を表す行列であるから，左辺の $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$ は，この変換を n 回合成したものなので，原点のまわりに $n\theta$ だけ回転する線形変換を表す．

一方，右辺の $\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ は，原点のまわ

りに $n\theta$ だけ回転する線形変換を表す行列であるから，両辺ともに同じ線形変換を表す行列である．

よって，$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$

〔別解〕

数学的帰納法による証明

［1］$n=1$ のとき

$$左辺=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^1=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$右辺=\begin{pmatrix}\cos 1\theta & -\sin 1\theta\\ \sin 1\theta & \cos 1\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

よって，$n=1$ のとき，等式は成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，等式が成り立つと仮定すると

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}$$

ここで，$n=k+1$ の場合を考えると

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{k+1}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta & -\cos k\theta\sin\theta-\sin k\theta\cos\theta\\ \sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta+\cos k\theta\cos\theta\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos(k\theta+\theta) & -\sin(k\theta+\theta)\\ \sin(k\theta+\theta) & \cos(k\theta+\theta)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta\\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，等式は $n=k+1$ のときも成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について等式は成り立つ．

6. A，B は直交行列であるから

$${}^tAA=A\,{}^tA=E$$
$${}^tBB=B\,{}^tB=E$$

${}^tA$ について

$${}^t({}^tA)\,{}^tA=A\,{}^tA=E$$
$${}^tA\,{}^t({}^tA)={}^tAA=E$$

よって，${}^tA$ は直交行列である．

AB について

$$\begin{aligned}{}^t(AB)(AB)&=({}^tB\,{}^tA)(AB)\\
&={}^tB({}^tAA)B\\
&={}^tBEB\\
&={}^tBB=E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(AB){}^t(AB)&=(AB)({}^tB\,{}^tA)\\
&=A(B\,{}^tB)\,{}^tA\\
&=AE\,{}^tA\\
&=A\,{}^tA=E\end{aligned}$$

よって，AB は直交行列である．

練習問題 1-B

1. 線形変換 f を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}$$

線形変換 g による $(x,\ y)$ の像を $(x',\ y')$ とすると

$$\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}x+0y\\ 0x-y\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，線形変換 g を表す行列は，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ である．

したがって，$h=f\circ g$ より，線形変換 h を表す行列は

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\
&=\boldsymbol{\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

2. （1）$\dfrac{x}{\sqrt{2}}=\dfrac{y}{3\sqrt{2}}=z$ より

$$x=\sqrt{2}z,\ y=3\sqrt{2}z$$

直線上の任意の点を $(\sqrt{2}z,\ 3\sqrt{2}z,\ z)$ とし，与えられた行列による像を $(x',\ y',\ z')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}z \\ 3\sqrt{2}z \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z-3z \\ z+3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 4z \\ z \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} x' = -2z \\ y' = 4z \\ z' = z \end{cases}$$

z を消去すると，$\dfrac{x'}{-2} = \dfrac{y'}{4} = z'$

したがって，求める図形は

直線 $\boldsymbol{\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{4} = z}$

（2）　$x+y+z=1$ より，$z = 1-x-y$

直線上の任意の点を $(x,\ y,\ 1-x-y)$ とし，与えられた行列による像を $(x',\ y',\ z')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ 1-x-y \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y & \cdots ① \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y & \cdots ② \\ z' = 1-x-y & \cdots ③ \end{cases}$$

①，②より

$\sqrt{2}x' = x - y \cdots ①'$

$\sqrt{2}y' = x + y \cdots ②'$

$①' + ②'$ より

$x = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y') \cdots ④$

$②' - ①'$ より

$y = \dfrac{1}{2}(-\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y') \cdots ⑤$

③に，④,⑤ を代入して

$$z' = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y') - \frac{1}{2}(-\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y')$$

$$z' = 1 - \sqrt{2}y'$$

したがって，求める図形は

平面 $\boldsymbol{\sqrt{2}y + z = 1}$

3.　$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ であるから

$$\triangle \mathrm{OPQ} = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2}|\,x_1y_2 - x_2y_1\,|$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ'}} = A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\triangle \mathrm{O'P'Q'} = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ax_1+by_1 & ax_2+by_2 \\ cx_1+dy_1 & cx_2+dy_2 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2}|(ax_1+by_1)(cx_2+dy_2)$$
$$-(ax_2+by_2)(cx_1+dy_1)|$$

$$= \frac{1}{2}|acx_1x_2 + adx_1y_2 + bcy_1x_2 + bdy_1y_2$$
$$-(acx_2x_1 + adx_2y_1 + bcy_2x_1 + bdy_2y_1)|$$

$$= \frac{1}{2}|\,ad(x_1y_2 - x_2y_1) - bc(x_1y_2 - x_2y_1)\,|$$

$$= \frac{1}{2}|\,(ad-bc)(x_1y_2 - x_2y_1)\,|$$

$$= \frac{1}{2}|\,ad-bc\,||\,x_1y_2 - x_2y_1\,|$$

$$= |\,ad-bc\,|\left(\frac{1}{2}|\,x_1y_2 - x_2y_1\,|\right)$$

$$= |\,ad-bc\,|\triangle \mathrm{OPQ}$$

$|\,A\,| > 0$ より，$|\,ad-bc\,| = |\,A\,|$ であるから

$\triangle \mathrm{O'P'Q'} = |\,A\,|\triangle \mathrm{OPQ}$

4.　2 点 A，B の f による像をそれぞれ $\mathrm{A'}$，$\mathrm{B'}$ とする．

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} - t\boldsymbol{a}$$
$$= (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$$

であるから，f による $\boldsymbol{p}$ の像は

$$f(\boldsymbol{p}) = f((1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b})$$
$$= f((1-t)\boldsymbol{a}) + f(t\boldsymbol{b})$$
$$= (1-t)f(\boldsymbol{a}) + tf(\boldsymbol{b})$$

（1）　$f(\boldsymbol{a})$，$f(\boldsymbol{b})$ はそれぞれ，$\mathrm{A'}$，$\mathrm{B'}$ の位置ベクトルであるから，$\mathrm{A'}$ と $\mathrm{B'}$ が一致すれば $f(\boldsymbol{a}) =$

$f(\boldsymbol{b})$ となる.

よって

$$f(\boldsymbol{p}) = (1-t)f(\boldsymbol{a}) + tf(\boldsymbol{a})$$
$$= f(\boldsymbol{a})$$

したがって, 直線 ℓ の像は 1 点 A$'$ となる.

(2) A$'$ と B$'$ が一致しなければ

$$f(\boldsymbol{p}) = (1-t)f(\boldsymbol{a}) + tf(\boldsymbol{b})$$

は, A$'$, B$'$ を通る直線のベクトル方程式を表す.

したがって, 直線 ℓ の像は 2 点 $f(\mathrm{A})$, $f(\mathrm{B})$ を通る直線となる.

∎