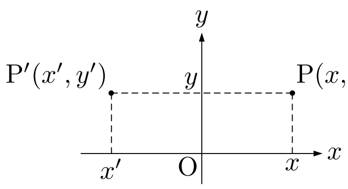
4章　行列の応用

§1　線形変換　(p.116〜p.129)

問1



$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = -x} \\ \boldsymbol{y' = y} \end{cases}$$

問2

(1)　この変換は,

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

と表されるので，線形変換である．変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

すなわち，$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(2)　この変換は,

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

と表されるので，線形変換である．変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

すなわち，$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(3)　この変換は,

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

と表され，原点 O(0, 0) を (2, −3) に移すので，線形変換ではない．

問3

(1)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より，$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

また，点 (2, 3) の像の座標は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$$

よって，**(12, −7)**

(2)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より，$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

また，点 (2, 3) の像の座標は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

よって，**(6, −2)**

問4

$$A\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

である．ここで,

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

であるから，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ は正則で,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問 5

線形変換の基本性質より

$$f(k\boldsymbol{p}+l\boldsymbol{q}) = f(k\boldsymbol{p})+f(l\boldsymbol{q})$$
$$= kf(\boldsymbol{p})+lf(\boldsymbol{q}) = \text{右辺}$$

問 6

$$f(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}) = 2f(\boldsymbol{a})+3f(\boldsymbol{b})$$
$$= 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{-7} \\ \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$$

問 7

（1） $3x+y=1$ より，$y=-3x+1$

この直線上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ -3x+1)$ の線形変換による像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -3x+1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x-2(-3x+1) \\ -x+3(-3x+1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7x-2 \\ -10x+3 \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} x' = 7x-2 & \cdots ① \\ y' = -10x+3 & \cdots ② \end{cases}$

①より，$x = \dfrac{x'+2}{7}$

②に代入して

$$y' = \frac{-10(x'+2)}{7}+3$$
$$7y' = -10(x'+2)+21$$

整理すると，$10x'+7y'=1$

したがって，求める図形は，直線 $\boldsymbol{10x+7y=1}$

（2） 直線 $y=x-1$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ x-1)$ の線形変換による像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x-1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x-(x-1) \\ 3x-3(x-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 3 \end{cases}$

したがって，求める図形は，点 **(1，3)**

（3） 直線上の任意の点 $\mathrm{P}(2+3t,\ -1+2t)$ の線形変換による像を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+3t \\ -1+2t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2(2+3t)+(-1+2t) \\ (2+3t)+3(-1+2t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3+8t \\ -1+9t \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} x' = 3+8t \\ y' = -1+9t \end{cases}$

したがって，求める図形は，

直線 $\boldsymbol{x=3+8t,\ y=-1+9t}$

または，t を消去して

$$y = -1+\frac{9(x-3)}{8}$$

直線 $\boldsymbol{9x-8y=35}$

問 8

$f\circ g$ を表す行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 0+3 \\ 2-6 & 0-9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{-9} \end{pmatrix}$$

問 9

逆変換 f^{-1} を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{0-3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

また，点 $(-1,\ 4)$ に移されるもとの点の座標は

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+4 \\ -3+0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって，点 **(2，−1)**

問 10

f^{-1} を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{0-3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

よって，点 $(1,\ 0)$ が f^{-1} によって移される点は

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0+0 \\ 1+0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

すなわち，$\left(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)$

g^{-1} を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{0-(-4)}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，点 $(1,\ 0)$ が g^{-1} によって移される点は

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+0 \\ -1+0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

すなわち，$\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{-\frac{1}{4}}\right)$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

であるから，$(f \circ g)^{-1}$ を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-12-0}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

よって，点 $(1,\ 0)$ が $(f \circ g)^{-1}$ によって移される点は

$$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4+0 \\ 0+0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

すなわち，$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}},\ \mathbf{0}\right)$

問 11

f の逆変換 f^{-1} を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3-0}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$3x+y=6$ より，$y=-3x+6$

この直線上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ -3x+6)$ のもとの座標を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -3x+6 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3x \\ -3x+6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x \\ -x+2 \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} x' = x & \cdots ① \\ y' = -x+2 & \cdots ② \end{cases}$

①，②から x を消去して

$y' = -x'+2$

したがって，求める図形は，直線 $\boldsymbol{x+y=2}$

問 12

$\frac{\pi}{2}$ の回転

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

π の回転

$$\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$\frac{\pi}{6}$ の回転

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}$$

$-\dfrac{\pi}{4}$ の回転

$$\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}} & \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}\\ \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}} & \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}\end{pmatrix}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix}$$

問 13

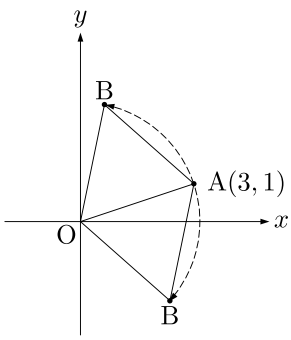
x 座標と y 座標は，xy 平面上における原点のまわりの回転と同じである。また z 座標は変わらないので

$$\begin{cases} x' = (\cos\theta)x-(\sin\theta)y\\ y'=(\cos\theta)x+(\sin\theta)y\\ z'=z\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

問 14



$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，点 A を原点を中心として，$\dfrac{\pi}{3}$，または $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点が B となる．

$\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点は

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

$-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点は

$$\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ \boldsymbol{-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

問 15

（1） 与えられた行列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とおく。すなわち

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ -\frac{3}{5}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

このとき

$$|\boldsymbol{a}|^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=1$$
$$|\boldsymbol{b}|^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{25}-\frac{12}{25}=0$$

よって，与えられた行列は直交行列である。

（2） 与えられた行列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ とおく。すなわち

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

このとき

$$|\boldsymbol{a}|^2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=1$$
$$|\boldsymbol{b}|^2=0^2+\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$
$$|\boldsymbol{c}|^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=1$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \\
\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} &= 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \\
\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} &= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 0
\end{aligned}
$$

よって，与えられた行列は直交行列である。

■