練習問題 2-A

1. (1)　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(-3-\lambda)-5$$
$$= \lambda^2+2\lambda-8$$
$$= (\lambda+4)(\lambda-2)$$

$(\lambda+4)(\lambda-2)=0$ より, 固有値は, $\boldsymbol{\lambda=-4,\ 2}$

i) $\lambda=-4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする.

$(A+4E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって, $5x+y=0$

$x=c_1$ とおくと

$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-5} \end{pmatrix}$　$(c_1 \neq 0)$

ii) $\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする.

$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって, $x-y=0$

$x=c_2$ とおくと

$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$　$(c_2 \neq 0)$

(2)　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(3-\lambda)-8$$
$$= \lambda^2-4\lambda-5$$
$$= (\lambda+1)(\lambda-5)$$

$(\lambda+1)(\lambda-5)=0$ より, 固有値は, $\boldsymbol{\lambda=-1,\ 5}$

i) $\lambda=-1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする.

$(A+1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって, $x+2y=0$

$y=-c_1$ とおくと

$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$　$(c_1 \neq 0)$

ii) $\lambda=5$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする.

$(A-5E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって, $x-y=0$

$x=c_2$ とおくと

$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$　$(c_2 \neq 0)$

(3)　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(1-\lambda)-(-1)$$
$$= \lambda^2-4\lambda+4$$
$$= (\lambda-2)^2$$

$(\lambda-2)^2$ より, 固有値は, $\boldsymbol{\lambda=2}$ (2重解)

$\lambda=2$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする.

$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって, $x-y=0$

$x=-c$ とおくと

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$　$(c \neq 0)$

2.　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 2-\lambda & -6 \\ 2 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix}$$

（3 行 − 2 行）

$$=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 2-\lambda & -6 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

（2 列 + 3 列）

$$=\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -3 \\ 2 & -4-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-\lambda\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-\lambda\{(-1-\lambda)(-4-\lambda)-(-2)\}$$

$$=-\lambda(\lambda^2+5\lambda+6)$$

$$=-\lambda(\lambda+2)(\lambda+3)$$

$-\lambda(\lambda+2)(\lambda+3)=0$ より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda=0,\ -2,\ -3}$

i）$\lambda=0$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-0E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-x+2y-3z=0,\ y-2z=0$

$y=2z,\ x=z$ であるから，$z=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\quad (c_1\neq 0)$$

ii）$\lambda=-2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

よって，$x+2y-3z=0,\ -x+y=0$

$y=x,\ z=x$ であるから，$x=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\quad (c_2\neq 0)$$

iii）$\lambda=-3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_3$ とする．

$$(A+3E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$2x+2y-3z=0,\ y-z=0$

$z=y,\ 2x=z$ であるから，$x=c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{c_3}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}\quad (c_3\neq 0)$$

3.　それぞれの行列を A とする。

（1）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(3-\lambda)-8$$

$$=\lambda^2-4\lambda-5$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-5)$$

$(\lambda+1)(\lambda-5)=0$ より, 固有値は, $\lambda=-1,\ 5$

i）$\lambda=-1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A+1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+2y=0$

$y=-c_1$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\quad (c_1\neq 0)$$

ii）$\lambda=5$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする.

$$(A-5E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-4&4\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$

$x=c_2$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0)$$

$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ は線形独立であるから，対角化可能で，$P=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$ とすれば

$$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{5}\end{pmatrix}$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(3-\lambda)(1-\lambda)-(-1)$$
$$=\lambda^2-4\lambda+4$$
$$=(\lambda-2)^2$$

$(\lambda-2)^2=0$ より，固有値は，$\lambda=2$（重解）

固有ベクトルは，1 個しか得られないので，対角化はできない。

（3）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&1&0\\0&4-\lambda&1\\0&0&4-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(4-\lambda)^3$$

$(4-\lambda)^3=0$ より，固有値は，$\lambda=4$（3 重解）

線形独立な固有ベクトルを 3 個得ることはできないので，対角化はできない。

（4）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\2&3-\lambda&2\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

（1 行 + 2 行 + 3 行）

$$=\begin{vmatrix}5-\lambda&5-\lambda&5-\lambda\\2&3-\lambda&2\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3-\lambda&2\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&0\\0&1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(5-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$(5-\lambda)(1-\lambda)^2=0$ より，固有値は，$\lambda=5$，1（重解）

i）$\lambda=5$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする.

$$(A-5E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-3&1&1\\2&-2&2\\1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-3&1&1\\2&-2&2\\1&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-3\\2&-2&2\\-3&1&1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&-4&8\\0&4&-8\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x+y-3z=0$，$y-2z=0$

$y=2z$，$x=z$ であるから，$z=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

ii）$\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y+z=0$

$z=-x-y$ であるから，$x=c_2$，$y=c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ -c_2-c_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \\ -c_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ c_3 \\ -c_3 \end{pmatrix}$$

$$=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ここで，$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$|P|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1-(-1-2)$$

$$=4\fallingdotseq\!\!\!\!/\;0$$

よって，P は正則であるから，A は対角化可能で

$$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

4. （1）　固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)(8-\lambda)-4$$

$$=\lambda^2-13\lambda+36$$

$$=(\lambda-4)(\lambda-9)$$

$(\lambda-4)(\lambda-9)=0$ より，固有値は，$\lambda=4$，9

i）$\lambda=4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-4E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+2y=0$

$y=-c_1$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1\neq 0)$$

ii）$\lambda=9$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-9E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$2x-y=0$

$x=c_2$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c_2\neq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって，たとえば

$$T=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ とすれば}$$

$$\boldsymbol{{}^tTAT}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

（2）　固有多項式を求めると

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)(2-\lambda)^2$$

$$-\{(2-\lambda)+(2-\lambda)\}$$

$$=(2-\lambda)\{(3-\lambda)(2-\lambda)-2\}$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)$$

$$=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4)$$

$(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4)=0$ より，固有値は，

$\lambda = 1,\ 2,\ 4$

i) $\lambda = 1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(B-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0,\ -y+z=0$

$x=-y,\ z=y$ であるから，$y=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda = 2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(B-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x=0,\ x+y+z=0$

$z=-y$ であるから，$y=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

iii) $\lambda = 4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_3$ とする．

$$(B-4E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-x+y+z=0,\ -y+z=0$

$y=z,\ x=2z$ であるから，$z=c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_3 = c_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_3 \fallingdotseq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，たとえば

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ とすれば}$$

$$\boldsymbol{{}^tTBT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

5. （1） 与式 $=(x\ \ y)\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

ここで，$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{pmatrix}$ とおく．

A の固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 8-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(5-\lambda)(8-\lambda)-4\\ &=\lambda^2-13\lambda+36\\ &=(\lambda-4)(\lambda-9)\end{aligned}$$

$(\lambda-4)(\lambda-9)=0$ より，固有値は，$\lambda=4,\ 9$

i) $\lambda=4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$(A-4E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

よって，$x+2y=0$

$y=c_1$ とおくと，

$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\quad (c_1\neq 0)$

ii) $\lambda=9$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$(A-9E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

よって，$2x-y=0$

$x=c_2$ とおくと，

$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\quad (c_2\neq 0)$

大きさが 1 の固有ベクトルを，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

直交行列 T を

$$T=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

とすれば

$${}^tTAT=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

すなわち，$A=T\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}{}^tT$

よって

$(x\ \ y)T\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

ここで，$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}={}^tT\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ とすれば

$(x'\ \ y')\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

よって，標準形は，$\boldsymbol{4x'^2+9y'^2}$

（2） 与式 $=(x\ \ y)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

ここで，$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ とおく．

A の固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(1-\lambda)(-1-\lambda)-1\\ &=\lambda^2-2\\ &=(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})\end{aligned}$$

$(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})=0$ より，固有値は

$\lambda=\pm\sqrt{2}$

i) $\lambda=\sqrt{2}$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$(A-\sqrt{2}E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix}1-\sqrt{2} & 1\\ 1 & -1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

よって，$(1-\sqrt{2})x+y=0$

$x=-c_1$ とおくと，

$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}-1\\ 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\quad (c_1\neq 0)$

ii) $\lambda=-\sqrt{2}$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$(A+\sqrt{2}E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix}1+\sqrt{2} & 1\\ 1 & -1+\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

よって，$(1+\sqrt{2})x+y=0$

$x=-c_2$ とおくと，

$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}-1\\ 1+\sqrt{2}\end{pmatrix}\quad (c_2\neq 0)$

大きさが 1 の固有ベクトルを，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+(1-\sqrt{2})^2}}\begin{pmatrix}-1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}-1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+(1+\sqrt{2})^2}}\begin{pmatrix}-1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}-1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

簡単のため

$$\alpha = \sqrt{4-2\sqrt{2}},\ \beta = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

とおき，直交行列 T を

$$T = \begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\alpha} & -\dfrac{1}{\beta}\\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{\alpha} & \dfrac{1+\sqrt{2}}{\beta}\end{pmatrix}$$

とすれば

$$^tTAT = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

すなわち，$A = T\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}{}^tT$

よって

$$(x\ \ y)T\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = {}^tT\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすれば

$$(x'\ \ y')\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{\sqrt{2}x'^2 - \sqrt{2}y'^2}$

6. A の固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\2 & 2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)-6$$

$$= \lambda^2-3\lambda-4$$

$$= (\lambda-4)(\lambda+1)$$

$(\lambda-4)(\lambda+1)=0$ より，固有値は，$\lambda = 4.\ -1$

i）$\lambda = 4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-4E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix}-3 & 3\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$

$x = c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda - 1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A+1E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$2x+3y=0$

$x = 3c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\quad (c_2 \neq 0)$$

ここで，$P = \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -2\end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

とすれば，$P^{-1}AP = D$，すなわち，$A = PDP^{-1}$

また，$P^{-1} = \dfrac{1}{-2-3}\begin{pmatrix}-2 & -3\\-1 & 1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}$

よって

$$A^n = (PDP^{-1})^n$$

$$= PD^nP^{-1}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^n & 0\\0 & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4^n & 3\cdot(-1)^n\\4^n & -2\cdot(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\cdot 4^n+3\cdot(-1)^n & 3\cdot 4^n-3\cdot(-1)^n\\2\cdot 4^n-2\cdot(-1)^n & 3\cdot 4^n+2\cdot(-1)^n\end{pmatrix}}$$

練習問題 2-B

1. 固有値が λ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である。

固有値 1 に対する固有ベクトルが，$c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ である

から

$$A\left\{c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\} = 1\cdot c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

すなわち，$A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\cdots$①

また，固有値 4 に対する固有ベクトルが，$c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ であるから

$$A\left\{c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}=4\cdot c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

すなわち，$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}\cdots$②

①，②より

$$A\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&8\\1&4\end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}3&8\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\frac{1}{3-2}\begin{pmatrix}3&8\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3-8&-6+24\\1-4&-2+12\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\mathbf{-5}&\mathbf{18}\\\mathbf{-3}&\mathbf{10}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. （1） 与えられた等式において，$\lambda=0$ とすれば

$$|A-0E|=(-1)^3(0-\lambda_1)(0-\lambda_2)(0-\lambda_3)$$
$$|A|=(-1)(-\lambda_1)(-\lambda_2)(-\lambda_3)$$

すなわち，$\boldsymbol{|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$

（2） A が正則ならば，$|A|\fallingdotseq 0$

よって，（1）より

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\fallingdotseq 0$ であるから，$\lambda_1\fallingdotseq 0$ かつ $\lambda_2\fallingdotseq 0$ かつ $\lambda_3\fallingdotseq 0$.

すなわち，A の固有値はすべて 0 ではない.

3. A の固有値 λ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると

$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\cdots$①

（1） ①の両辺に，左から A をかけると

$$\begin{aligned}A^2\boldsymbol{x}&=A\lambda\boldsymbol{x}\\&=\lambda A\boldsymbol{x}\\&=\lambda(\lambda\boldsymbol{x})\quad(A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\text{より})\\&=\lambda^2\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

$A^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$ であるから，これは，λ^2 が A^2 の固有値であることを示している。

（2） A が正則であれば，A は逆行列をもつので，①の両辺に，左から A^{-1} をかけると

$$A^{-1}A\boldsymbol{x}=A^{-1}\lambda\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x}=\lambda A^{-1}\boldsymbol{x}$$
$$\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{x}$$

$A^{-1}\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$ であるから，これは，$\dfrac{1}{\lambda}$ が A^{-1} の固有値であることを示している。

4. $Q=(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ と表すことができる。

$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$ とおいて，固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&2\\1&2-\lambda&1\\2&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

（1 行 + 2 行 + 3 行）

$$\begin{aligned}&=\begin{vmatrix}4-\lambda&4-\lambda&4-\lambda\\1&2-\lambda&1\\2&1&1-\lambda\end{vmatrix}\\&=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2-\lambda&1\\2&1&1-\lambda\end{vmatrix}\\&=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1-\lambda&0\\0&-1&-1-\lambda\end{vmatrix}\\&=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&0\\-1&-1-\lambda\end{vmatrix}\\&=(4-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)\end{aligned}$$

$(4-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)=0$ より，固有値は，$\lambda=-1,\ 1,\ 4$

i) $\lambda=-1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする.

$$(A+1E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&2\\1&3&1\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}2&1&2\\1&3&1\\2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&2\\2&1&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-5&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x+3y+z=0,\ -5y=0$

$z=-x,\ y=0$ であるから，$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\quad(c_1\fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\0&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x+y+z=0,\ y+2z=0$

$y=-2z,\ x=z$ であるから，$z=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\quad(c_2\fallingdotseq 0)$$

iii) $\lambda=4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_3$ とする．

$$(A-4E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-2&1\\2&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-2&1\\2&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\-3&1&2\\2&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-5&5\\0&5&-5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-5&5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x-2y+z=0,\ -y+z=0$

$y=z,\ x=z$ であるから，$z=c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_3=c_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(c_3\fallingdotseq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_3=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

よって，固有値の値が小さい順に列ベクトルを並べ，たとえば

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}&\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{6}}}&\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}\\\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{6}}}&\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}\\-\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}&\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{6}}}&\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}\end{pmatrix}\text{ とすれば}$$

$$^tTAT=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

すなわち，$A = T\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tT$

よって，$(x \quad y \quad z)T\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

ここで，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = {}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすれば

$$(x' \quad y' \quad z')\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

すなわち，$Q = -x'^2 + y'^2 + 4z'^2$ であるから

$\boldsymbol{\alpha = -1,\ \beta = 1,\ \gamma = 4}$

∎