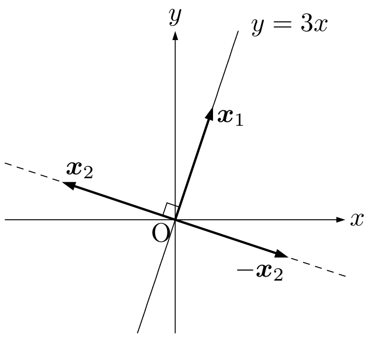
4章　行列の応用

§2　固有値とその応用 (p.132〜p.151)

問1

(1)



直線 $y=3x$ に関する線対称の変換を表す行列を A とする．

$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1$ は $y=3x$ に平行で，$\boldsymbol{x}_2$ は $\boldsymbol{x}_1$ に垂直であるから

$$A\boldsymbol{x_1}=\boldsymbol{x_1},\quad A\boldsymbol{x_2}=-\boldsymbol{x_2}$$

すなわち

$$A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

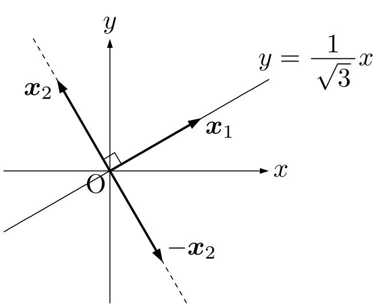
よって

$$A\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{1-(-9)}\begin{pmatrix}1&3\\-3&1\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&3\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-3&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-8&6\\6&8\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4&3\\3&4\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

(2)



直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する線対称の変換を表す行列を A とする．

$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1$ は $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に平行で，$\boldsymbol{x}_2$ は $\boldsymbol{x}_1$ に垂直であるから

$$A\boldsymbol{x_1}=\boldsymbol{x_1},\quad A\boldsymbol{x_2}=-\boldsymbol{x_2}$$

すなわち

$$A\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

よって

$$A\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1\\1&-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1\\1&-\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1\\1&-\sqrt{3}\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{3-(-1)}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1\\1&-\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&2\sqrt{3}\\2\sqrt{3}&-2\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

問2

ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ はそれぞれ，$y=x$，$y=-x$ に平行である．

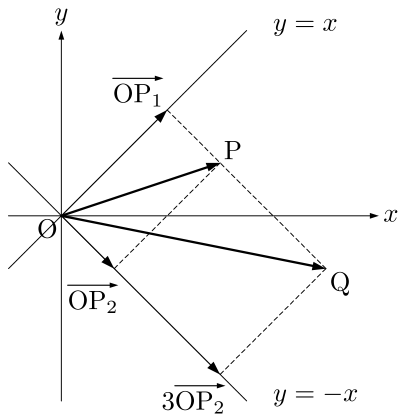
また

$$B\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1\boldsymbol{x}_1$$

$$B\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}=3\boldsymbol{x}_2$$

点 P について，直線 $y=x$ および $y=-x$ 上にそれぞれ点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ をとり，平行四辺形 $\mathrm{OP_1PP_2}$ をつくり，点 P の f による像を Q とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=f(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_2}})\\&=f(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}})+f(\overrightarrow{\mathrm{OP_2}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+3\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\end{aligned}$$



問 3

（1） 固有多項式を求めると

$$
\begin{aligned}
|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(5-\lambda)-(-6) \\
&= \lambda^2-5\lambda+6 \\
&= (\lambda-2)(\lambda-3)
\end{aligned}
$$

$(\lambda-2)(\lambda-3)=0$ より，固有値は，$\boldsymbol{\lambda=2,\ 3}$

i) $\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-x+y=0$

$x=c_1$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda=3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-3x+2y=0$

$x=2c_2$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

（2） 固有多項式を求めると

$$
\begin{aligned}
|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)(4-\lambda)-3 \\
&= \lambda^2-6\lambda+5 \\
&= (\lambda-1)(\lambda-5)
\end{aligned}
$$

$(\lambda-1)(\lambda-5)=0$ より，固有値は，$\boldsymbol{\lambda=1,\ 5}$

i) $\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$

$x=c_1$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda=5$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-5E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$3x+y=0$

$x=c_2$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

問 4

（1） 固有多項式を求めると

$$
\begin{aligned}
|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\{(-2-\lambda)(3-\lambda)-(-4)\} \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) \\
&= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)
\end{aligned}
$$

$(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)=0$ より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda=2,\ \pm 1}$

i) $\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-x+3y-z=0,\ -4y+z=0$

$z=4y,\ x=-y$ であるから，$y=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda = 1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$3y - z = 0,\ -4y + 2z = 0$

$y = z = 0$ であるから，$x = c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

iii）$\lambda = -1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_3$ とする．

$$(A+1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$2x + 3y - z = 0,\ -y + z = 0$

$y = z,\ x = -z$ であるから，$z = c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{c_3}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (c_3 \fallingdotseq 0)$$

（2） 固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

(1 行 + 2 行)

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\{(4-\lambda)^2 - 1\}$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda+1)(4-\lambda-1)$$

$$= (1-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda)$$

$(1-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) = 0$ より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda = 1,\ 3,\ 5}$

i）$\lambda = 1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x + 2y + 3z = 0,\ 5y + 7z = 0$

$y = -\dfrac{7}{5}z,\ x = -\dfrac{1}{5}z$ であるから，$z = 5c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{-7} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda = 3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+2y+z=0,\ y+z=0$

$y=-z,\ x=z$ であるから，$z=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

iii) $\lambda=5$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_3$ とする．

$$(A-5E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+2y-z=0,\ y-z=0$

$y=z,\ x=-z$ であるから，$z=c_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{c_3}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (c_3 \fallingdotseq 0)$$

問 5

（1） 固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

（1 列 − 2 列）

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2+\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\{-\lambda(3-\lambda)-(-2)\}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

$-(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$ より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda = 1,\ 2}$ (2 重解)

i) $\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，$x-z=0,\ -y+z=0$

$x=y,\ y=z$ であるから，$z=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-2E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$-x-y+z=0$

$y=c_2,\ z=c_3$ とおくと，$x=-c_2+c_3$ となるから

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-c_2+c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}+\boldsymbol{c_3}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$(c_2\fallingdotseq 0$ または $c_3\fallingdotseq 0)$

（2） 固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&-1\\-1&1-\lambda&0\\0&3&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

（2 列 + 3 列）

$$=\begin{vmatrix}-\lambda&0&-1\\-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&0&-1\\-1&1&0\\0&1&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&-1&0\\-\lambda&0&-1\\0&1&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&-\lambda&-1\\0&1&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&-1\\1&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\{\lambda(2+\lambda)+1\}$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1)$$

$$=(1-\lambda)(\lambda+1)^2$$

$(1-\lambda)(\lambda+1)^2=0$ より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda=1,\ -1}$ (2 重解)

i）$\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&0&0\\0&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&0&0\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&3&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&1\\0&3&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x-y+z=0,\ -y+z=0$

$y=z,\ x=0$ であるから，$z=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\quad(c_1\fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda=-1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A+1E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&2&0\\0&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&2&0\\0&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&-1\\0&3&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x+y-z=0,\ 3y-z=0$

$z=3y,\ x=2y$ であるから，$y=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}\quad(c_2\fallingdotseq 0)$$

問 6

$$P=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{1-2}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&6\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}4-6&-6+10\\-4+3&6-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2+4&-4+4\\-1+1&-2+1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}=\text{右辺}\end{aligned}$$

問 7

（1）　固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}|A-\lambda E|&=\begin{vmatrix}5-\lambda&-4\\2&-1-\lambda\end{vmatrix}\\&=(5-\lambda)(-1-\lambda)-(-8)\\&=\lambda^2-4\lambda-5+8\\&=\lambda^2-4\lambda+3\\&=(\lambda-1)(\lambda-3)\end{aligned}$$

$(\lambda-1)(\lambda-3)=0$ より，固有値は

$\lambda=1,\ 3$

i) $\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}4&-4\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$

$y=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

ii) $\lambda=3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-3E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}2&-4\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x-2y=0$

$y=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0)$$

たとえば，$c_1=c_2=1$ とおき

$$P=(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

とすれば

$$\boldsymbol{P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}}$$

（2）　固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}|B-\lambda E|&=\begin{vmatrix}-2-\lambda&8\\-3&8-\lambda\end{vmatrix}\\&=(-2-\lambda)(8-\lambda)-(-24)\\&=\lambda^2-6\lambda-16+24\\&=\lambda^2-6\lambda+8\\&=(\lambda-2)(\lambda-4)\end{aligned}$$

$(\lambda-2)(\lambda-4)=0$ より，固有値は

$\lambda=2,\ 4$

i) $\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(B-2E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-4&8\\-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x-2y=0$

$y=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

ii) $\lambda=4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(B-4E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-6&8\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$3x-4y=0$

$y=3c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0)$$

たとえば，$c_1=c_2=1$ とおき

$$P=(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2)=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}$$

とすれば

$$\boldsymbol{P^{-1}BP=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}}$$

問 8

（1） 固有値は，$\lambda=2,\ \pm1$

それぞれの固有値に対する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3=c_3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$(c_1\fallingdotseq 0,\ c_2\fallingdotseq 0,\ c_3\fallingdotseq 0)$

したがって，たとえば $c_1=c_2=c_3=1$ とおいて

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&1\\4&0&1\end{pmatrix}$$

とすれば

$$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

（2）固有値は，$\lambda=1,\ 3,\ 5$

それぞれの固有値に対する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}-1\\-7\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3=c_3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$(c_1\fallingdotseq 0,\ c_2\fallingdotseq 0,\ c_3\fallingdotseq 0)$

したがって，たとえば $c_1=c_2=c_3=1$ とおいて

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-7&-1&1\\5&1&1\end{pmatrix}$$

とすれば

$$\boldsymbol{P^{-1}BP}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{3}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{5}\end{pmatrix}$$

問 9

（1） 固有値は，$\lambda=1,\ 2$ (2 重解)

それぞれの固有値に対する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\quad (c_1\fallingdotseq 0)$$

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad (c_2\fallingdotseq 0 \text{ または } c_3\fallingdotseq 0)$$

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$$|P|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=1-(1-1)=1\fallingdotseq 0$$

よって，P は正則であるから，A は対角化可能で

$$\boldsymbol{P^{-1}AP}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

（2） 固有値は，$\lambda=1,\ -1$ (2 重解)

それぞれの固有値に対する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$(c_1\fallingdotseq 0,\ \ c_2\fallingdotseq 0)$

したがって，線形独立な固有ベクトルが 2 個しかとれないので，行列 B は対角化可能ではない.

問 10

固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}|A-\lambda E|&=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&-2-\lambda\end{vmatrix}\\&=(1-\lambda)(-2-\lambda)-4\\&=\lambda^2+\lambda-2-4\\&=\lambda^2+\lambda-6\\&=(\lambda+3)(\lambda-2)\end{aligned}$$

$(\lambda+3)(\lambda-2)=0$ より，固有値は

$\lambda=-3,\ 2$

i) $\lambda=-3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする.

$$(A+3E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$2x+y=0$

$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\quad (c_1\fallingdotseq 0)$$

ii) $\lambda=2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする.

$$(A-2E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x-2y=0$

$y=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad (c_2\fallingdotseq 0)$$

$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ は互いに直交している.

大きさが 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

よって，たとえば

$$T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} \text{とすれば}$$

$$\boldsymbol{{}^tTAT = \begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}}$$

問 11

固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & -1\\ 1 & -\lambda & 1\\ -1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 - 1 - 1 - (-\lambda - \lambda - \lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda - 2$$

$$= -(\lambda^3 - 3\lambda + 2)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)$$

$$= -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

$-(\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$ より，固有値は

$\lambda = -2,\ 1$（重解）

i）$\lambda = -2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A+2E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって，$x + 2y + z = 0,\ y + z = 0$

$z = c_1$ とおくと

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda = 1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x - y + z = 0$

$y = c_2,\ z = c_3$ とおくと，$x = c_2 - c_3$

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}c_2-c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$(c_2 \neq 0 \quad \text{または} \quad c_3 \neq 0)$

ここで，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ とおく．

$\boldsymbol{p}_2$ と同じ向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{p}_3$ の $\boldsymbol{p}_2$ への正射影を求めると

$$(\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+0+0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

よって

$$\boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{p}_3 - (\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{u}_2$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

とすれば，$\boldsymbol{q}_3$ は $\boldsymbol{p}_2$ と直交する．

$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{q}_3$ に平行な単位ベクトルを用いて，たとえば，直交行列 T を

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

とすれば，$^tTAT=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$

問 12

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=T\boldsymbol{x'}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\\ \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases}\boldsymbol{x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}}\\ \boldsymbol{y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}}\end{cases}$

これらを，等式の左辺に代入すると

$$\text{左辺}=3\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-2\cdot\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+3\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=\frac{3(x'-y')^2-2(x'^2-y'^2)+3(x'+y')^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\{3(x'^2-2x'y'+y'^2)-2x'^2+2y'^2+3(x'^2+2x'y'+y'^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}(4x'^2+8y'^2)$$

$$=2x'^2+4y'^2=\text{右辺}$$

問 13

（1）　与式は，$(x\ \ y)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ と表すことができるので，$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ とおく．

A の固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^2-4$$

$$=\{(1-\lambda)+2\}\{(1-\lambda)-2\}$$

$$=(\lambda-3)(\lambda+1)$$

$(\lambda-3)(\lambda+1)=0$ より，固有値は

$\lambda=-1,\ 3$

i）$\lambda=-1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$(A+1E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0$

$y=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\quad(c_1\fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda=3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$(A-3E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$

$y=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\quad(c_2\fallingdotseq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

直交行列 T を

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

とすれば

$$^tTAT=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

すなわち，$A=T\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}{}^tT$

よって

$$(x\ \ y)T\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}={}^tT\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ とすれば

$$(x'\ \ y')\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{3x'^2 - y'^2}$

また，このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}} \end{cases}$

（2） 与式は，$(x \ \ y)\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことができるので，$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ とおく．

A の固有多項式を求めると

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)(9-\lambda) - 4$$

$$= \lambda^2 - 15\lambda + 50$$

$$= (\lambda - 10)(\lambda - 5)$$

$(\lambda - 10)(\lambda - 5) = 0$ より，固有値は

$\lambda = 10, \ 5$

i）$\lambda = 10$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A - 10E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$2x + y = 0$

$x = c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (c_1 \fallingdotseq 0)$$

ii）$\lambda = 5$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A - 5E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x - 2y = 0$

$y = c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

直交行列 T を

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

とすれば

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

すなわち，$A = T\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}{}^tT$

よって

$$(x \ \ y)T\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすれば

$$(x' \ \ y')\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{10x'^2 + 5y'^2}$

また，このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x'+2y'}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2x'+y'}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{x'+2y'}{\sqrt{5}}} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{-2x'+y'}{\sqrt{5}}} \end{cases}$

問 14

$2x^2 + 2xy + 2y^2$ は，$(x \ \ y)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことができるので，ここで，$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．

A の固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)^2 - 1$$
$$= \{(2-\lambda)+1\}\{(2-\lambda)-1\}$$
$$= (\lambda-3)(\lambda-1)$$

$(\lambda-3)(\lambda-1)=0$ より，固有値は

$\lambda = 3,\ 1$

i）$\lambda=3$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$

$x=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda=1$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0$

$y=c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ とすると

$$\boldsymbol{u}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

直交行列 T を

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とすれば

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

すなわち，$A = T\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}{}^tT$

よって

$$(x\ \ y)T\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすれば

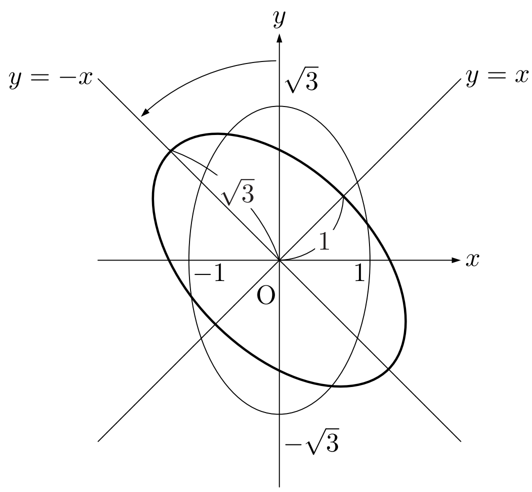
$$(x'\ \ y')\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{3x'^2 + y'^2}$

以上より，$(x',\ y')$ は $3x'^2+y'^2=3$，すなわち，楕円 $\dfrac{x'^2}{1^2}+\dfrac{y'^2}{(\sqrt{3})^2}=1$ 上の点であり

$$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}'$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}'$$

であるから，$(x,\ y)$ はこの楕円を，原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した図形である．



問 15

固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)(-5-\lambda)-(-3)$$
$$= \lambda^2+6\kappa+5+3$$
$$= \lambda^2+6\kappa+8$$
$$= (\lambda+2)(\lambda+4)$$

$(\lambda+2)(\lambda+4)=0$ より，固有値は

$\lambda = -2,\ -4$

i）$\lambda=-2$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とする．

$$(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-3y=0$

$y=c_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda=-4$ のときの固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2$ とする．

$$(A+4E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x - y = 0$

$y = c_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c_2 \fallingdotseq 0)$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

とすれば，$P^{-1}AP = D$，すなわち，$A = PDP^{-1}$

また，$P^{-1} = \dfrac{1}{3-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

よって

$$\begin{aligned}
A^n &= (PDP^{-1})^n \\
&= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) \\
&= PD^nP^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\cdot(-2)^n & (-4)^n \\ (-2)^n & (-4)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\cdot(-2)^n - (-4)^n & -3\cdot(-2)^n + 3\cdot(-4)^n \\ (-2)^n - (-4)^n & -(-2)^n + 3\cdot(-4)^n \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

∎