1章　確率

§2　いろいろな確率 (p.13〜p.24)

問 1

$P(A)=\dfrac{40}{160}=\dfrac{1}{4}$, $P(B)=\dfrac{54}{160}=\dfrac{27}{80}$,

$P(A\cap B)=\dfrac{15}{160}=\dfrac{3}{32}$

よって

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{32}}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{32}\times 32}{\frac{1}{4}\times 32}=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{32}}{\frac{54}{160}}=\frac{\frac{3}{32}\times 160}{\frac{54}{160}\times 160}=\frac{15}{54}=\boldsymbol{\frac{5}{18}}$$

問 2

$n(\Omega)=6^2=36$

また，2個のさいころの目の出方を $(a,\ b)$ で表す.

（1）　$n(A)=3^2=9$ であるから

$$P(A)=\frac{9}{36}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

（2）　2個のさいころの出る目がともに偶数のとき，目の出方の総数は，$3\times 3=9$ 通りであり，この条件のもとで，出る目の和が3の倍数となるのは，$(2,\ 4)$, $(4,\ 2)$, $(6,\ 6)$ の3通りであるから

$$P_A(B)=\frac{3}{9}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

（3）

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

問 3

選ばれた学生の国語の得点が70点以上である事象を A，数学の得点が70点以上である事象を B，英語の得点が70点以上である事象を C で表すと

$P(A)=\dfrac{7}{10}$,　$P_A(B)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$,　$P_{A\cap B}(C)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

よって，求める確率は

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P_A(B)P_{A\cap B}(C)=\frac{7}{10}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\boldsymbol{\frac{21}{125}}$$

問 4

A，B，C がくじに当たる事象をそれぞれ A, B, C で表す.

（1）　$P(A)=\dfrac{4}{20}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

（2）　$P(\overline{A})=\dfrac{4}{5}$,　$P_A(B)=\dfrac{3}{19}$,　$P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{4}{19}$ であるから

$$P(B)=P(A)P_A(B)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{19}+\frac{4}{5}\times\frac{4}{19}=\frac{3+16}{5\cdot 19}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

（3）　$P_{A\cap B}(C)=\dfrac{2}{18}=\dfrac{1}{9}$ であるから

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P_A(B)P_{A\cap B}(C)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{19}\times\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{1}{285}}$$

（4）　$P_A(\overline{B})=\dfrac{16}{19}$, $P_{A\cap\overline{B}}(C)=\dfrac{3}{18}=\dfrac{1}{6}$ であるから

$$P(A\cap\overline{B}\cap C)=P(A)P_A(\overline{B})P_{A\cap\overline{B}}(C)=\frac{1}{5}\times\frac{16}{19}\times\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{8}{285}}$$

（5）　C が当たるのは，（3），（4）の場合に加えて，A がはずれて B が当たったとき，C が当たるという場合と，A がはずれて B もはずれたとき，C が当たるという場合がある.

$P(\overline{A})=\dfrac{16}{20}=\dfrac{4}{5}$, $P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{4}{19}$, $P_{\overline{A}\cap B}(C)=\dfrac{3}{18}=\dfrac{1}{6}$ であるから

$$P(\overline{A}\cap B\cap C)=P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)P_{\overline{A}\cap B}(C)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{19}\times\frac{1}{6}=\frac{8}{285}$$

また，$P_{\overline{A}}(\overline{B})=\dfrac{15}{19}$, $P_{\overline{A}\cap\overline{B}}(C)=\dfrac{4}{18}=\dfrac{2}{9}$ であるから

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)=P(\overline{A})P_{\overline{A}}(\overline{B})P_{\overline{A}\cap\overline{B}}(C)=\frac{4}{5}\times\frac{15}{19}\times\frac{2}{9}=\frac{40}{285}$$

以上より

$$P(C)=\frac{1}{285}+\frac{8}{285}+\frac{8}{285}+\frac{40}{285}=\frac{1+8+8+40}{285}=\frac{57}{285}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

問 5

1から600までの偶数の個数は，$600\div 2=300$ より，

$2\times 1=2$

$2\times 2=4$

$\cdots$

$2\times 300=600$

の300個だから，$P(A)=\dfrac{300}{600}=\dfrac{1}{2}$

1から600までの3の倍数の個数は，$600\div 3=200$ より，

$3\times 1=3$

$3\times 2=6$

$\cdots$

$3\times 200=600$

の200個だから，　$P(B)=\dfrac{200}{600}=\dfrac{1}{3}$

また，$A\cap B$ は，選んだ数が6の倍数であるという事象である.

1から600までの6の倍数の個数は，$600\div 6=100$ より，

$6\times 1=6$

$6\times 2=12$

$\cdots$

$6\times 100=600$

の100個だから，

$P(A\cap B)=\dfrac{100}{600}=\dfrac{1}{6}$

以上より，$P(A)P(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}=P(A\cap B)$ であるから，A と B は**互いに独立である.**

1から400までの偶数の個数は，$400\div 2=200$ より，

$2\times 1=2$
$2\times 2=4$
$\cdots$
$2\times 200=400$
の 200 個だから，$P(A)=\dfrac{200}{400}=\dfrac{1}{2}$

1 から 400 までの 3 の倍数の個数は，$400\div 3=133.3\cdots$ より，

$3\times 1=3$
$3\times 2=6$
$\cdots$
$3\times 133=399$
の 133 個だから，　$P(B)=\dfrac{133}{400}$

また，$A\cap B$ は，選んだ数が 6 の倍数であるという事象である．1 から 400 までの 6 の倍数の個数は，$400\div 6=66.6\cdots$ より，

$6\times 1=6$
$6\times 2=12$
$\cdots$
$6\times 66=396$
の 66 個だから，$P(A\cap B)=\dfrac{66}{400}\left(=\dfrac{132}{800}\right)$

よって，

$$P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{133}{400}=\frac{133}{800}$$

であるから，$P(A\cap B)\fallingdotseq P(A)P(B)$ となり，A と B は**互いに独立ではない．**

問 6

1 回目に当たらないという事象を A，2 回目に当たらないという事象を B とすると，$P(A\cap B)$ が求める確率である．

（1）　A と B は互いに独立なので

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{6}{8}\times\frac{6}{8}=\mathbf{\frac{9}{16}}$$

（2）　確率の乗法定理より，

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}=\mathbf{\frac{15}{28}}$$

問 7

この選手が 1 回の打席でヒットを打つ確率は $\dfrac{1}{3}$ であるから，求める確率は

$$ {}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^2={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{1\cdot 2^2}{3^5}=\mathbf{\frac{40}{243}}$$

問 8

1 回の試行で，表が出る確率，裏が出る確率はいずれも $\dfrac{1}{2}$ である．

（1）　求める確率は

$$ {}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1^3\cdot 1^3}{2^6}=\mathbf{\frac{5}{16}}$$

（2）　少なくとも 1 回表が出る事象を A とすると，$\overline{A}$ は，1 回も表が出ない事象を表す．

$$P(\overline{A})={}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^6=1\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{64}$$

よって

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{64}=\mathbf{\frac{63}{64}}$$

問 9

選んだ従業員が男性であるという事象を A_1，女性であるという事象を A_2，社宅に住んでいるという事象を B で表すと

$P(A_1)=\dfrac{75}{100}$，$P(A_2)=\dfrac{25}{100}$

$P_{A_1}(B)=\dfrac{40}{100}$，$P_{A_2}(B)=\dfrac{20}{100}$

求める確率は，$P_B(A_1)$ であるから，ベイズの定理により

$$P_B(A_1)=\frac{\dfrac{75}{100}\times\dfrac{40}{100}}{\dfrac{75}{100}\times\dfrac{40}{100}+\dfrac{25}{100}\times\dfrac{20}{100}}=\frac{\dfrac{75\times 40}{10000}}{\dfrac{75\times 40+25\times 20}{10000}}=\frac{3000}{3000+500}=\frac{30}{35}=\mathbf{\frac{6}{7}}$$

問 10

取り出した製品が A 社，B 社，C 社の製品であるという事象をそれぞれ A，B，C，不良品であるという事象を D で表すと

$P(A)=\dfrac{2}{10}$，$P(B)=\dfrac{3}{10}$，$P(C)=\dfrac{5}{10}$

$P_A(D)=\dfrac{2.5}{100}$，$P_B(D)=\dfrac{1.5}{100}$，$P_C(D)=\dfrac{1}{100}$

（1）

$$P(D)=P(A)P_A(D)+P(B)P_B(D)+P(C)P_C(D)=\frac{2}{10}\times\frac{2.5}{100}+\frac{3}{10}\times\frac{1.5}{100}+\frac{5}{10}\times\frac{1}{100}=\frac{5+4.5+5}{1000}=\frac{14.5}{1000}=\mathbf{\frac{29}{2000}}$$

（2）　ベイズに定理により，取り出された不良品が A 社の製品である確率は，

$$P_D(A)=\frac{\dfrac{2}{10}\times\dfrac{2.5}{100}}{\dfrac{29}{2000}}=\mathbf{\frac{10}{29}}$$

取り出された不良品が B 社の製品である確率は，

$$P_D(B)=\frac{\dfrac{3}{10}\times\dfrac{1.5}{100}}{\dfrac{29}{2000}}=\mathbf{\frac{9}{29}}$$

取り出された不良品が C 社の製品である確率は，

$$P_D(B)=\frac{\dfrac{5}{10}\times\dfrac{1}{100}}{\dfrac{29}{2000}}=\mathbf{\frac{10}{29}}$$

∎