第１章　数と式の計算

§１　整式の計算

1.1　整式の加法・減法

1　次の問いに答えなさい．

(1)　$-5axy$ の係数と次数を答えなさい．

解答

次数　3,　係数　-5

(2)　ax^2y において，x に着目したときの次数と係数を答えなさい．

解答

与式 $= (ay)x^2$

よって，次数　2,　係数　ay

(3)　$-2abx^2y^3$ において，a，b に着目したときの次数と係数を答えなさい．

解答

与式 $= (-2x^2y^3)ab$

よって，次数　2,　係数　$-2x^2y^3$

2　次の問いに答えなさい．

(1)　$2x^2+5ax-a^2+3$ において，x に着目したときの次数と定数項を答えなさい．

解答

次数　2,　定数項　$-a^2+3$

(2)　$-abx^3y^2+5axy-2by$ において，a に着目したときの次数と定数項を答えなさい．

解答

与式 $= (-bx^3y^2+5xy)a-2by$

よって，次数　1,　定数項　$-2by$

3　次の式を〔　〕内の文字について降べきの順に整理しなさい．

(1)　$-3x^2+12x-17+10x^2-8x+9$　〔x〕

解答

与式 $= -3x^2+10x^2+12x-8x-17+9$

$= 7x^2+4x-8$

(2)　$5xy-4x^2+y^2-2x-7y+6$　〔y〕

解答

与式 $= y^2+5xy-7y-4x^2-2x+6$

$= y^2+(5x-7)y+(-4x^2-2x+6)$

(3)　$6x^2-4y^2-2xy-3x+4y+1$　〔x〕

解答

与式 $= 6x^2-2xy-3x-4y^2+4y+1$

$= 6x^2+(-2y-3)x+(-4y^2+4y+1)$

(4)　$3x^3-5x^2y+2y^3-xy^2-2y^2+3x+1$　〔x〕

解答

与式 $= 3x^3-5x^2y-xy^2+3x+2y^3-2y^2+1$

$= 3x^3-5yx^2+(-y^2+3)x+(2y^3-2y^2+1)$

(5)　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$　〔a〕

解答

与式 $= a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$

$= (b-c)a^2-b^2a+c^2a+b^2c-bc^2$

$= (b-c)a^2+(-b^2+c^2)a+(b^2c-bc^2)$

4　次の整式の組において，$A+B$，$A-B$ を〔　〕内の文字について計算しなさい．

(1)　$A=x^3-ax^2+4a^3$
　　$B=2x^4+a^2x^2-3x$　〔x〕

解答

$$A+B=(x^3-ax^2+4a^3)+(2x^4+a^2x^2-3x)$$
$$=2x^4+x^3-ax^2+a^2x^2-3x+4a^3$$
$$=2x^4+x^3+(a^2-a)x^2-3x+4a^3$$

$$A-B=(x^3-ax^2+4a^3)-(2x^4+a^2x^2-3x)$$
$$=-2x^4+x^3-ax^2-a^2x^2+3x+4a^3$$
$$=-2x^4+x^3+(-a^2-a)x^2+3x+4a^3$$

(2)　$A=y^2+2yx-3x^2$
　　$B=-x^2+7xy+2y^2$　〔y〕

解答

$$A+B=(y^2+2yx-3x^2)+(-x^2+7xy+2y^2)$$
$$=y^2+2y^2+2yx+7xy-3x^2-x^2$$
$$=3y^2+9xy-4x^2$$

$$A-B=(y^2+2yx-3x^2)-(-x^2+7xy+2y^2)$$
$$=y^2-2y^2+2yx-7xy-3x^2+x^2$$
$$=-y^2-5xy-2x^2$$

(3)　$A=a^2b-2b^2+ac$
　　$B=3ab-2a^2+c^2$　〔a〕

解答

$$A+B=(a^2b-2b^2+ac)+(3ab-2a^2+c^2)$$
$$=a^2b-2b^2+ac+3ab-2b^2+c^2$$
$$=(b-2)a^2+(3b+c)a+(-2b^2+c^2)$$

$$A-B=(a^2b-2b^2+ac)-(3ab-2a^2+c^2)$$
$$=a^2b-2b^2+ac-3ab+2b^2-c^2$$
$$=(b+2)a^2+(-3b+c)a+(-2b^2-c^2)$$

(4)　$A=xy^2-yz+6z^3$
　　$B=-4z^2+3xz+x^2$　〔z〕

解答

$$A+B=(xy^2-yz+6z^3)+(-4z^2+3xz+x^2)$$
$$=6z^3-4z^2-yz+3xz+xy^2+x^2$$
$$=6z^3-4z^2+(3x-y)z+(x^2+xy^2)$$

$$A-B=(xy^2-yz+6z^3)-(-4z^2+3xz+x^2)$$
$$=6z^3+4z^2-yz-3xz+xy^2-x^2$$
$$=6z^3+4z^2+(-3x-y)z+(-x^2+xy^2)$$

1.2 整式の乗法

1 指数法則

5 次の各式を計算しなさい．

(1) $a^2 \times a^4$

解答
与式 $= a^{2+4} = a^6$

(2) $(a^3)^2 \times (2a)^2$

解答
与式 $= a^{3\times 2} \times 2^2 \cdot a^2$
$= a^6 \times 4a^2 = 4a^8$

(3) $(-x^2)^3$

解答
与式 $= (-1)^3 \cdot (x^2)^3$
$= -1 \cdot x^6 = -x^6$

(4) $-a^2 \times (-b)^3$

解答
与式 $= -a^2 \times (-1)^3 \cdot b^3$
$= -a^2 \times (-b^3) = a^2b^3$

(5) $(-3a^2b)^3 \times (-2ab^3)^2$

解答
与式 $= (-3)^3 \cdot (a^2)^3b^3 \times (-2)^2 \cdot a^2(b^3)^2$
$= -27a^6b^3 \times 4a^2b^6$
$= -108a^8b^9$

(6) $(-ab)^2(-2a^3b)$

解答
与式 $= (-1)^2 \cdot a^2b^2 \cdot (-2a^3b)$
$= -2a^5b^3$

(7) $-\left(\frac{1}{2}xy^3\right)^2 \times (-2x^2y)^3$

解答
与式 $= -\left(\frac{1}{4}x^2y^6\right) \times (-8x^6y^3)$
$= 2x^8y^9$

2 展開

6 次の各式を計算しなさい．

(1) $ab^3(a^2-5b^2)$

解答
与式 $= ab^3 \cdot a^2 - ab^3 \cdot 5b^2$
$= a^3b^3 - 5ab^5$

(2) $12a^2b\left(\frac{a^2}{3} - \frac{ab}{6} - \frac{b^2}{4}\right)$

解答
与式 $= 12a^2b \cdot \frac{a^2}{3} - 12a^2b \cdot \frac{ab}{6} - 12a^2b \cdot \frac{b^2}{4}$
$= 4a^4b - 2a^3b^2 - 3a^2b^3$

(3) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

解答
与式 $= a^4 - a^3b + a^2b^2$
$+ a^3b - a^2b^2 + ab^3$
$+ a^2b^2 - ab^3 + b^4$
$= a^4 + a^2b^2 + b^4$

(4) $(x^2+3xy-y^2)(2x-5y)$

解答
与式 $= 2x^3 - 5x^2y$
$+ 6x^2y - 15xy^2$
$- 2xy^2 + 5y^3$
$= 2x^3 + x^2y - 17xy^2 + 5y^3$

(5) $(x^2+5x-2)(x+2)$

解答
与式 $= x^3 + 2x^2$
$+ 5x^2 + 10x$
$- 2x - 4$
$= x^3 + 7x^2 + 8x - 4$

7　次の各式を計算しなさい.

(1)　$(3x-y)(2x+5)$

解答

与式 $= 6x^2+15x-2xy-5y$

(2)　$(5x-2)(4x-1)$

解答

与式 $= 20x^2-5x$

$\qquad -8x+2$

$= 20x^2-13x+2$

(3)　$(a^3-2a+3)(3a-4)$

解答

与式 $= 3a^4-4a^3-6a^2+8a$

$\qquad +9a-12$

$= 3a^4-4a^3-6a^2+17a-12$

(4)　$\left(\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{3}{4}x^2y\right)(x-y)$

解答

与式 $= \dfrac{2}{3}x^4-\dfrac{2}{3}x^3y$

$\qquad +\dfrac{3}{4}x^3y-\dfrac{3}{4}x^2y^2$

$= \dfrac{2}{3}x^4+\dfrac{1}{12}x^3y-\dfrac{3}{4}x^2y^2$

(5)　$(a+b)(2a-b)(a-2b)$

解答

与式 $= (2a^2-ab+2ab-b^2)(a-2b)$

$= (2a^2+ab-b^2)(a-2b)$

$= 2a^3-4a^2b$

$\qquad +a^2b-2ab^2$

$\qquad -ab^2+2b^3$

$= 2a^3-3a^2b-3ab^2+2b^3$

3　乗法公式

8　次の各式を展開しなさい.

(1)　$(x+3)(x-5)$

解答

与式 $= x^2+(3-5)x+3\cdot(-5)$

$= x^2-2x-15$

(2)　$(x-5y)(x+2y)$

解答

与式 $= x^2+(-5y+2y)x+(-5y)\cdot(2x)$

$= x^2-3xy-10y^2$

(3)　$(2x-3y)(2x+3y)$

解答

与式 $= (2x)^2-(3y)^2$

$= 4x^2-9y^2$

(4)　$(2a+b)^3$

解答

与式 $= (2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot b+3\cdot 2a\cdot b^2+b^3$

$= 8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$

(5)　$(3a-2b)^3$

解答

与式 $= (3a)^3+3\cdot(3a)^2\cdot(-2b)$

$\qquad +3\cdot 3a\cdot(-2b)^2+(-2b)^3$

$= 27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$

(6)　$(2x+3y)^3$

解答

与式 $= (2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 3y$

$\qquad +3\cdot 2x\cdot(3y)^2+(3y)^3$

$= 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

(7)　$(a+b+2c)^2$

解答

与式 $= a^2+b^2+(2c)^2+2ab$

$\quad +2b\cdot(2c)+2\cdot(2c)\cdot a$

$= a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc+4ca$

(8)　$(x-2y-2)^2$

解答

与式 $= x^2+(-2y)^2+(-2)^2+2x\cdot(-2y)$

$\quad +2\cdot(-2y)\cdot(-2)+2\cdot(-2)\cdot x$

$= x^2+4y^2+4-4xy+8y-4x$

(9)　$(-2a+b-3c)^2$

解答

与式 $= (-2a)^2+b^2+(-3c)^2+2\cdot(-2a)\cdot b$

$\quad +2b\cdot(-3c)+2\cdot(-3c)\cdot(-2a)$

$= 4a^2+b^2+9c^2-4ab-6bc+12ca$

(10)　$(2a-1)(4a^2+2a+1)$

解答

与式 $= (2a-1)\{(2a)^2+2a\cdot 1+1^2\}$

$= (2a)^3-1^3$

$= 8a^3-1$

(11)　$\left(a+\dfrac{1}{3}\right)\left(a^2-\dfrac{a}{3}+\dfrac{1}{9}\right)$

解答

与式 $= \left(a+\dfrac{1}{3}\right)\left\{a^2-a\cdot\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}$

$= a^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

$= a^3+\dfrac{1}{27}$

9　次の各式を計算しなさい．

(1)　$(a-b-c)(a-b+c)$

解答

$(a-b)=A$ とおくと，

与式 $= \{(a-b)-c\}\{(a-b)+c\}$

$= (A-c)(A+c)$

$= A^2-c^2$

$= (a-b)^2-c^2$

$= a^2-2ab+b^2-c^2$

(2)　$(x+2y-1)(x+2y-3)$

解答

$(x+2y)=A$ とおくと，

与式 $= \{(x+2y)-1\}\{(x+2y)-3\}$

$= (A-1)(A-3)$

$= A^2-4A+3$

$= (x+2y)^2-4(x+2y)+3$

$= x^2+4xy+4y^2-4x-8y+3$

(3)　$(a-b+c)(a+2b+c)$

解答

$(a+c)=A$ とおくと，

与式 $= \{(a+c)-b\}\{(a+c)+2b\}$

$= (A-b)(A+2b)$

$= A^2+bA-2b^2$

$= (a+c)^2+b(a+c)-2b^2$

$= a^2+2ac+c^2+ab+bc-2b^2$

(4)　$(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

解答

$(a^2+1)=A$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \{(a^2+1)+a\}\{(a^2+1)-a\} \\
&= (A+a)(A-a) \\
&= A^2-a^2 \\
&= (a^2+1)^2-a^2 \\
&= a^4+2a^2+1-a^2 \\
&= a^4+a^2+1
\end{aligned}
$$

(5)　$(a+b+c)(a-b-c)$

解答

$(b+c)=A$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\} \\
&= (a+A)(a-A) \\
&= a^2-A^2 \\
&= a^2-(b+c)^2 \\
&= a^2-(b^2+2bc+c^2) \\
&= a^2-b^2-2bc-c^2
\end{aligned}
$$

(6)　$(a^2-2a+1)(a^2+2a-1)$

解答

$(2a-1)=A$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \{a^2-(2a-1)\}\{a^2+(2a-1)\} \\
&= (a^2-A)(a^2+A) \\
&= a^4-A^2 \\
&= a^4-(2a-1)^2 \\
&= a^4-(4a^2-4a+1) \\
&= a^4-4a^2+4a-1
\end{aligned}
$$

10　次の各式を計算しなさい．

(1)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (x+1)(x+4)\times(x+2)(x+3) \\
&= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)
\end{aligned}
$$

$(x^2+5x)=A$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (A+4)(A+6) \\
&= A^2+10A+24 \\
&= (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24 \\
&= x^4+10x^3+25x^2 \\
&\qquad +10x^2+50x+24 \\
&= x^4+10x^3+35x^2+50x+24
\end{aligned}
$$

(2)　$(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (x+1)(x-4)\times(x-1)(x-2) \\
&= (x^2-3x-4)(x^2-3x+2)
\end{aligned}
$$

$(x^2-3x)=A$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (A-4)(A+2) \\
&= A^2-2A-8 \\
&= (x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8 \\
&= x^4-6x^3+9x^2 \\
&\qquad -2x^2+6x-8 \\
&= x^4-6x^3+7x^2+6x-8
\end{aligned}
$$

Tea Break

1　次の数の列に続く数を４つまであげなさい．

12，1，1，1，2，1，3，…

2　次にくる数字は？

77，49，36，18，□

1.3　因数分解

1　公式の利用

11　次の各式を因数分解しなさい．

(1)　$5a^3b-25a^2b^2+15ab^3$

解答

与式 $=5ab(a^2-5ab+3b^2)$

(2)　$9a^2+6a+1$

解答

与式 $=(3a)^2+2\cdot 3a\cdot 1+1^2$

$=(3a+1)^2$

(3)　$x^2+16x+48$

解答

与式 $=x^2+(4+12)x+4\cdot 12$

$=(x+4)(x+12)$

(4)　$8x^3+1$

解答

与式 $=(2x)^3+1^3$

$=(2x+1)\{(2x)^2-2x\cdot 1+1^2\}$

$=(2x+1)(4x^2-2x+1)$

(5)　$64x^3-27$

解答

与式 $=(4x)^3-3^3$

$=(4x-3)\{(4x)^2+4x\cdot 3+3^2\}$

$=(4x-3)(16x^2+12x+9)$

12　次の各式を因数分解しなさい．

(1)　$5x^2+7x+2$

解答

$$\begin{array}{cccc} 5 & 2 & & 7 \\ \hline 5 & 2 & \longrightarrow & 2 \\ 1 & 1 & \longrightarrow & 5 \end{array}$$

与式 $=(5x+2)(x+1)$

(2)　$3x^2-10x+3$

解答

$$\begin{array}{cccc} 3 & 3 & & -10 \\ \hline 3 & -1 & \longrightarrow & -1 \\ 1 & -3 & \longrightarrow & -9 \end{array}$$

与式 $=(3x-1)(x-3)$

(3)　$4x^2+3x-27$

解答

$$\begin{array}{cccc} 4 & -27 & & 3 \\ \hline 4 & -9 & \longrightarrow & -9 \\ 1 & 3 & \longrightarrow & 12 \end{array}$$

与式 $=(4x-9)(x+3)$

(4)　$2a^2-7a-15$

解答

$$\begin{array}{cccc} 2 & -15 & & -7 \\ \hline 2 & 3 & \longrightarrow & 3 \\ 1 & -5 & \longrightarrow & -10 \end{array}$$

与式 $=(2a+3)(a-5)$

(5)　$3a^2+17ab+10b^2$

解答

$$\begin{array}{cccc} 3 & 10b^2 & & 17b \\ \hline 3 & 2b & \longrightarrow & 2b \\ 1 & 5b & \longrightarrow & 15b \end{array}$$

与式 $=(3a+2b)(a+5b)$

(6)　$12a^2-25ab+12b^2$

解答

$$\begin{array}{cccc} 12 & 12b^2 & & -25b \\ \hline 4 & -3b & \longrightarrow & -9b \\ 3 & -4b & \longrightarrow & -16b \end{array}$$

与式 $=(4a-3b)(3a-4b)$

2 いろいろな因数分解

13 次の各式を因数分解しなさい．

(1) $a^3-6a^2b+9ab^2$

解答

与式 $=a(a^2-6ab+9b^2)$

$=a(a-3b)^2$

(2) $2x^2-18y^2$

解答

与式 $=2(x^2-9y^2)$

$=2(x+3y)(x-3y)$

(3) $10a^3+15a^2b-10ab^2$

解答

与式 $=5a(2a^2+3ab-2b^2)$

$=5a(a+2b)(2a-b)$

14 次の各式を因数分解しなさい．

(1) x^4-13x^2+36

解答

$x^2=X$ とおくと

与式 $=X^2-13X+36$

$=(X-4)(X-9)$

$=(x^2-4)(x^2-9)$

$=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

(2) x^4-10x^2+9

解答

$x^2=X$ とおくと

与式 $=X^2-10X+9$

$=(X-1)(X-9)$

$=(x^2-1)(x^2-9)$

$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

(3) $4x^4-15x^2-4$

解答

$x^2=X$ とおくと

与式 $=4X^2-15X-4$

$=(4X+1)(X-4)$

$=(4x^2+1)(x^2-4)$

$=(4x^2+1)(x+2)(x-2)$

15 次の各式を因数分解しなさい．

(1) $(a+b)^2-2(a+b)-3$

解答

$(a+b)=A$ とおくと

与式 $=A^2-2A-3$

$=(A-3)(A+1)$

$=(a+b-3)(a+b+1)$

(2) $6(a+b)^2+11(a+b)-2$

解答

$(a+b)=A$ とおくと

与式 $=6A^2+11A-2$

$=(6A-1)(A+2)$

$=\{6(a+b)-1\}(a+b+2)$

$=(6a+6b-1)(a+b+2)$

(3) $(x+y)(x+y+5)+6$

解答

$(x+y)=X$ とおくと

与式 $=X(X+5)+6$

$=X^2+5X+6$

$=(X+2)(X+3)$

$=(x+y+2)(x+y+3)$

(4) $(x^2+2x)(x^2+2x-4)+3$

解答

$(x^2+2x)=X$ とおくと

与式 $=X(X-4)+3$

$=X^2-4X+3$

$=(X-1)(X-3)$

$=(x^2+2x-1)(x^2+2x-3)$

$=(x^2+2x-1)(x+3)(x-1)$

16　次の各式を因数分解しなさい．

(1)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

解答

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= (x+1)(x+4)\times(x+2)(x+3)-24\\
&= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24
\end{aligned}$$

$(x^2+5x)=X$ とおくと

$$\begin{aligned}
&= (X+4)(X+6)-24\\
&= X^2+10X+24-24\\
&= X^2+10X\\
&= X(X+10)\\
&= (x^2+5x)(x^2+5x+10)\\
&= x(x+5)(x^2+5x+10)
\end{aligned}$$

(2)　$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+15$

解答

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= (x-1)(x-7)\times(x-3)(x-5)+15\\
&= (x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+15
\end{aligned}$$

$(x^2-8x)=X$ とおくと

$$\begin{aligned}
&= (X+7)(X+15)+15\\
&= X^2+22X+105+15\\
&= X^2+22X+120\\
&= (X+12)(X+10)\\
&= (x^2-8x+12)(x^2-8x+10)\\
&= (x-2)(x-6)(x^2-8x+10)
\end{aligned}$$

Tea Break

3　次の□に入る数字は？

$$\frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{7},\ \frac{1}{2},\ \frac{\square}{\square},\ \frac{3}{5},\ \frac{7}{11},\ \frac{2}{3},\ \frac{9}{13},\ \cdots$$

17　次の各式を因数分解しなさい．

(1)　$xy+x+y+1$

解答

x について整理すると

$$\text{与式} = (y+1)x+(y+1)$$

$(y+1)=Y$ とおくと

$$\begin{aligned}
&= Yx+Y\\
&= Y(x+1)\\
&= (y+1)(x+1)
\end{aligned}$$

(2)　$2a-3b-3ab+2$

解答

a について整理すると

$$\text{与式} = (2-3b)a+(2-3b)$$

$(2-3b)=B$ とおくと

$$\begin{aligned}
&= Ba+B\\
&= B(a+1)\\
&= (2-3b)(a+1)
\end{aligned}$$

(3)　$9-9y+3xy-x^2$

解答

y について整理すると

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= (3x-9)y-(x^2-9)\\
&= 3(x-3)y-(x-3)(x+3)
\end{aligned}$$

$(x-3)=X$ とおくと

$$\begin{aligned}
&= 3Xy-X(x+3)\\
&= X\{3y-(x+3)\}\\
&= (x-3)(3y-x-3)
\end{aligned}$$

(4)　$a^2+b^2+2bc+2ca+2ab$

解答

c について整理すると

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= (2a+2b)c+(a^2+2ab+b^2)\\
&= 2(a+b)c+(a+b)^2
\end{aligned}$$

$(a+b)=A$ とおくと

$$\begin{aligned}
&= 2Ac+A^2\\
&= A(2c+A)\\
&= (a+b)\{2c+(a+b)\}\\
&= (a+b)(a+b+2c)
\end{aligned}$$

18　次の各式を因数分解しなさい．

(1)　$x^2+(3y+1)x+(y+4)(2y-3)$

解答

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & (y+4)(2y-3) & & 3y+1 \\ \hline 1 & \times & y+4 & \longrightarrow & y+4 \\ 1 & & 2y-3 & \longrightarrow & 2y-3 \end{array}$$

$$\text{与式}=\{x+(y+4)\}\{x+(2y-3)\}$$
$$=(x+y+4)(x+2y-3)$$

(2)　$x^2-2xy+y^2-x+y-2$

解答

x について整理すると

$$\text{与式}=x^2-(2y+1)x+(y^2+y-2)$$
$$=x^2-(2y+1)x+(y+2)(y-1)$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & (y+2)(y-1) & & -2y-1 \\ \hline 1 & \times & -(y+2) & \longrightarrow & -y-2 \\ 1 & & -(y-1) & \longrightarrow & -y+1 \end{array}$$

$$\text{与式}=\{x-(y+2)\}\{x-(y-1)\}$$
$$=(x-y-2)(x-y+1)$$

(3)　$x^2+xy-2y^2-4x+y+3$

解答

x について整理すると

$$\text{与式}=x^2+(y-4)x-(2y^2-y-3)$$

定数項を因数分解すると，

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & -3 & & -1 \\ \hline 2 & \times & -3 & \longrightarrow & -3 \\ 1 & & 1 & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

$$\text{与式}=x^2+(y-4)x-(2y-3)(y+1)$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -(2y-3)(y+1) & & y-4 \\ \hline 1 & \times & 2y-3 & \longrightarrow & 2y-3 \\ 1 & & -(y+1) & \longrightarrow & -y-1 \end{array}$$

$$\text{与式}=\{x+(2y-3)\}\{x-(y+1)\}$$
$$=(x+2y-3)(x-y-1)$$

(4)　$2x^2-2xy-4y^2+5x-7y+2$

解答

x について整理すると

$$\text{与式}=2x^2-(2y-5)x-(4y^2+7y-2)$$

定数項を因数分解すると，

$$\begin{array}{ccccc} 4 & & -2 & & 7 \\ \hline 4 & \times & -1 & \longrightarrow & -1 \\ 1 & & 2 & \longrightarrow & 8 \end{array}$$

$$\text{与式}=2x^2-(2y-5)x-(4y-1)(y+2)$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & -(4y-1)(y+2) & & -2y+5 \\ \hline 2 & \times & -(4y-1) & \longrightarrow & -4y+1 \\ 1 & & y+2 & \longrightarrow & 2y+4 \end{array}$$

$$\text{与式}=\{2x-(4y-1)\}\{x+(y+2)\}$$
$$=(2x-4y+1)(x+y+2)$$

(5)　$2x^2+5xy+2y^2+4x-y-6$

解答

x について整理すると

$$\text{与式}=2x^2+(5y+4)x+(2y^2-y-6)$$

定数項を因数分解すると，

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & -6 & & -1 \\ \hline 2 & \times & 3 & \longrightarrow & 3 \\ 1 & & -2 & \longrightarrow & -4 \end{array}$$

$$\text{与式}=2x^2+(5y+4)x+(2y+3)(y-2)$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & (2y+3)(y-2) & & 5y+4 \\ \hline 2 & \times & y-2 & \longrightarrow & y-2 \\ 1 & & 2y+3 & \longrightarrow & 4y+6 \end{array}$$

$$\text{与式}=\{2x+(y-2)\}\{x+(2y+3)\}$$
$$=(2x+y-2)(x+2y+3)$$

Tea Break

4　次の A, B, C, D には，１から９までの異なる整数があてはまります．

$$A+B=C$$
$$D-C=A$$
$$A\times B=D$$
$$D-B=B$$

19　次の各式を因数分解しなさい．

(1)　$a^2-b^2+4bc-4c^2$

解答

a について整理すると

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= a^2-(b^2-4bc+4c^2)\\
&= a^2-(b-2c)^2
\end{aligned}
$$

$(b-2c)=B$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&= a^2-B^2\\
&= (a+B)(a-B)\\
&= \{a+(b-2c)\}\{a-(b-2c)\}\\
&= (a+b-2c)(a-b+2c)
\end{aligned}
$$

(2)　$x^2-y^2+x^3-y^3$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (x^2-y^2)+(x^3-y^3)\\
&= (x-y)(x+y)+(x-y)(x^2+xy+y^2)
\end{aligned}
$$

$(x-y)=M$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&= M(x+y)+M(x^2+xy+y^2)\\
&= M\{(x+y)+(x^2+xy+y^2)\}\\
&= (x-y)(x+y+x^2+xy+y^2)
\end{aligned}
$$

(3)　x^3-2x^2-4x+8

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (x^3-4x)-(2x^2-8)\\
&= x(x^2-4)-2(x^2-4)
\end{aligned}
$$

$(x^2-4)=X$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&= xX-2X\\
&= X(x-2)\\
&= (x^2-4)(x-2)\\
&= (x+2)(x-2)(x-2)\\
&= (x+2)(x-2)^2
\end{aligned}
$$

20　次の各式を因数分解しなさい．

(1)　x^4+x^2+1

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= x^4+x^2+1+x^2-x^2\\
&= (x^4+2x^2+1)-x^2\\
&= (x^2+1)^2-x^2\\
&= \{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}\\
&= (x^2+x+1)(x^2-x+1)
\end{aligned}
$$

(2)　$4a^4+1$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= 4a^4+1+4a^2-4a^2\\
&= (4a^4+4a^2+1)-4a^2\\
&= (2a^2+1)^2-4a^2\\
&= \{(2a^2+1)+2a\}\{(2a^2+1)-2a\}\\
&= (2a^2+2a+1)(2a^2-2a+1)
\end{aligned}
$$

(3)　x^4-6x^2+1

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= x^4-6x^2+1+4x^2-4x^2\\
&= (x^4-2x^2+1)-4x^2\\
&= (x^2-1)^2-(2x)^2\\
&= \{(x^2-1)+2x\}\{(x^2-1)-2x\}\\
&= (x^2+2x-1)(x^2-2x-1)
\end{aligned}
$$

(4)　$x^4-11x^2y^2+y^4$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= x^4-11x^2y^2+y^4+9x^2y^2-9x^2y^2\\
&= (x^4-2x^2y^2+y^4)-9x^2y^2\\
&= (x^2-y^2)^2-(3xy)^2\\
&= \{(x^2-y^2)+3xy\}\{(x^2-y^2)-3xy\}\\
&= (x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)
\end{aligned}
$$

1.4 整式の除法

1 整式の除法

21 次の整式 A を B で割ったときの商と余りを求め，等式に表しなさい．

(1)　$A=6x^2-7x+15,\ B=2x-5$

解答

$$\begin{array}{rr}
 & 3x \quad\ +4 \\ \cline{2-2}
2x-5\,\big) & 6x^2 \quad -7x+15 \\
 & 6x^2-15x \qquad \\ \cline{2-2}
 & 8x+15 \\
 & 8x-20 \\ \cline{2-2}
 & 35
\end{array}$$

商　$3x+4$，余り　35

$6x^2-7x+15=(2x-5)(3x+4)+35$

(2)　$A=2x^4+x^3+6x^2+x+10,\ B=2x^2+3x+5$

解答

$$\begin{array}{rr}
 & x^2 \quad -x \quad +2 \qquad\qquad \\ \cline{2-2}
2x^2+3x+5\,\big) & 2x^4+x^3+6x^2+x+10 \\
 & 2x^4+3x^3+5x^2 \qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & -2x^3+x^2+x \qquad \\
 & -2x^3-3x^2-5x \qquad \\ \cline{2-2}
 & 4x^2+6x+10 \\
 & 4x^2+6x+10 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

商　x^2-x+2，余り　0

$2x^4+x^3+6x^2+x+10$

$\quad =(2x^2+3x+5)(x^2-x+2)$

(3)　$A=x^3-1,\ B=2x+1$

解答

$$\begin{array}{rr}
 & \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8} \qquad \\ \cline{2-2}
2x+1\,\big) & x^3 \qquad\qquad\qquad -1 \\
 & x^3+\frac{1}{2}x^2 \qquad\qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & -\frac{1}{2}x^2 \qquad\qquad \\
 & -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x \qquad \\ \cline{2-2}
 & \frac{1}{4}x-1 \\
 & \frac{1}{4}x+\frac{1}{8} \\ \cline{2-2}
 & -\frac{9}{8}
\end{array}$$

商　$\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}$，余り　$-\dfrac{9}{8}$

$x^3-1=(2x+1)\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}\right)-\dfrac{9}{8}$

22 次の計算をしなさい．

(1)　$(6x^2+5x-4)\div(2x-1)$

解答

$$\begin{array}{rr}
 & 3x+4 \\ \cline{2-2}
2x-1\,\big) & 6x^2+5x-4 \\
 & 6x^2-3x \qquad \\ \cline{2-2}
 & 8x-4 \\
 & 8x-4 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

商　$3x+4$，余り　0

(2)　$(x^3-9x)\div(x^2+3x-2)$

解答

$$\begin{array}{rr}
 & x \quad -3 \qquad\qquad \\ \cline{2-2}
x^2+3x-2\,\big) & x^3 \qquad\quad -9x \qquad \\
 & x^3+3x^2-2x \qquad \\ \cline{2-2}
 & -3x^2-7x \qquad \\
 & -3x^2-9x+6 \\ \cline{2-2}
 & 2x-6
\end{array}$$

商　$x-3$，余り　$2x-6$

(3)　$(6c^3-4c^2+2c+1)\div(2c^2+1)$

解答

$$\begin{array}{rr}
 & 3c \quad -2 \qquad\qquad \\ \cline{2-2}
2c^2+1\,\big) & 6c^3-4c^2+2c+1 \\
 & 6c^3 \qquad\quad +3c \qquad \\ \cline{2-2}
 & -4c^2-c+1 \\
 & -4c^2 \qquad -2 \\ \cline{2-2}
 & -c+3
\end{array}$$

商　$3c-2$，余り　$-c+3$

(4)　$(2x^2+7ax+8a^2)\div(2x+3a)$

解答

$$\begin{array}{rr}
 & x+2a \qquad \\ \cline{2-2}
2x+3a\,\big) & 2x^2+7ax+8a^2 \\
 & 2x^2+3ax \qquad \\ \cline{2-2}
 & 4ax+8a^2 \\
 & 4ax+6a^2 \\ \cline{2-2}
 & 2a^2
\end{array}$$

商　$x+2a$，余り　$2a^2$

23　次の問いに答えなさい.

(1)　ある整式を $x-3$ で割ったとき，商が x^2+x+6 で，余りが 14 であった．この整式を求めなさい．

解答

ある整式を A とおくと，題意より

$$\begin{aligned} A &= (x-3)(x^2+x+6)+14 \\ &= x^3+x^2+6x \\ &\qquad\qquad -3x^2-3x-18+14 \\ &= x^3-2x^2+3x-4 \end{aligned}$$

(2)　x^2-2x-1 で割ると，商が $2x-3$，余りが $-2x$ である整式を求めなさい．

解答

ある整式を A とおくと，題意より

$$\begin{aligned} A &= (x^2-2x-1)(2x-3)-2x \\ &= 2x^3-3x^2 \\ &\qquad -4x^2+6x \\ &\qquad\qquad -2x+3 \\ &\qquad\qquad -2x \\ &= 2x^3-7x^2+2x+3 \end{aligned}$$

(3)　整式 A で，x^3-x^2+3x+1 を割ると，商が $x+1$，余りが $3x-1$ であった．整式 A を求めなさい．

解答

題意より，

$$x^3-x^2+3x+1=A(x+1)+3x-1$$

よって，

$$A(x+1)=x^3-x^2+2$$

$$A=(x^3-x^2+2)\div(x+1)$$

実際に割り算をすると，

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \ -2x \ +2 \\ \hline x+1 & x^3 \ -x^2 \qquad +2 \\ & x^3 \ +x^2 \\ \hline & \quad -2x^2 \\ & \quad -2x^2 \ -2x \\ \hline & \qquad\quad 2x \ +2 \\ & \qquad\quad 2x \ +2 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

よって，$A=x^2-2x+2$

2　整式の最大公約数と最小公倍数

24　次の数，整式の組の最大公約数と最小公倍数を求めなさい．

(1)　12，18，30

解答

$12=2^2\times 3$

$18=2\times 3^2$

$30=2\times 3\times 5$

よって，

G. C. M.　$2\times 3=6$

L. C. M.　$2^2\times 3^2\times 5=180$

(2)　$4a^2bc^3$，$6a^3b^2cd$

解答

G. C. M.　$2a^2bc$

L. C. M.　$12a^3b^2c^3d$

(3)　ab^3，a^2bc，a^3bc^2

解答

G. C. M.　ab

L. C. M.　$a^3b^3c^2$

(4)　$2x^2(x-1)^3(x+3)$，$6x(x-1)^2(x+2)^2$

解答

G. C. M.　$2x(x-1)^2$

L. C. M.　$6x^2(x-1)^3(x+3)(x+2)^2$

(5)　x^2+x-2，$2x^2-8$

解答

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$2x^2-8=2(x+2)(x-2)$

よって，

G. C. M.　$x+2$

L. C. M.　$2(x+2)(x-2)(x-1)$

(6)　$a^4-a^2b^2$,　a^4-ab^3

解答

$a^4-a^2b^2=a^2(a^2-b^2)=a^2(a+b)(a-b)$

$a^4-ab^3=a(a^3-b^3)=a(a-b)(a^2+ab+b^2)$

よって,

G. C. M.　$a(a-b)$

L. C. M.　$a^2(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)$

(7)　x^2-1,　x^3-1,　x^2-2x+1

解答

$x^2-1=(x+1)(x-1)$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$x^2-2x+1=(x-1)^2$

よって,

G. C. M.　$x-1$

L. C. M.　$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$

25　次の問いに答えなさい.

(1)　最大公約数が $x+1$, 最小公倍数が x^3+4x^2+3x である２つの２次式を求めなさい.

解答

２つの２次式は両方とも最大公約数の $x+1$ を因数としてもつ.

また，最小公倍数を因数分解すると,

$$x^3+4x^2+3x=x(x^2+4x+3)$$
$$=x(x+1)(x+3)$$

となるので，因数の組み合わせは,

$$\begin{cases}(x+1)x\\(x+1)(x+3)\end{cases}$$

となる.

よって，２つの２次式は,

$x(x+1)$,　$(x+1)(x+3)$

(2)　x に関する２つの整式がある．その最大公約数は $x+3$ で，最小公倍数は x^3+4x^2+x-6 であるという．この２つの整式を求めなさい.

解答

２つの整式は両方とも最大公約数の $x+3$ を因数としてもつ.

また，最小公倍数 x^3+4x^2+x-6 は，最大公約数 $x+3$ で割り切れるので

$$x^3+4x^2+x-6=(x+3)(x^2+x-2)$$
$$=(x+3)(x-1)(x+2)$$

となる．よって，これらの因数の組み合わせは,

$$\begin{cases}(x+3)(x-1)\\(x+3)(x+2)\end{cases}$$

または

$$\begin{cases}(x+3)\\(x+3)(x-1)(x+2)\end{cases}$$

よって，２つの整式は,

$(x+3)(x-1)$,　$(x+3)(x+2)$

または

$(x+3)$,　$(x+3)(x-1)(x+2)$

※ 次の問題は,「因数定理」が終わってから解いてください.

26　２つの x についての整式 x^2+ax+5, x^3-bx-a の最大公約数が $x+1$ であるとき，a, b の値と，この２つの整式の最小公倍数を求めなさい.

解答

$P(x)=x^2+ax+5$

$Q(x)=x^3-bx-a$

とおくと，$P(x)$, $Q(x)$ はいずれも最大公約数 $x+1$ で割り切れるので,

$P(-1)=0$, $Q(-1)=0$

よって,

$$\begin{cases}1-a+5=0 & \cdots ①\\-1+b-a=0 & \cdots ②\end{cases}$$

①より，$a=6$

②に代入して，$b=7$

以上より

$$P(x)=x^2+6x+5=(x+1)(x+5)$$
$$Q(x)=x^3-7x-6=(x+1)(x^2-x-6)$$
$$=(x+1)(x+2)(x-3)$$

となるので，最小公倍数は

$(x+1)(x+2)(x+5)(x-3)$

1.5　因数定理

1　剰余の定理

27　次の整式 $A(x)$ を $B(x)$ で割ったときの余りを求めなさい.

(1)　$A(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$
$B(x) = x - 1$

解答
$A(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 3$
$= 1 - 2 + 1 + 3 = 3$
よって，余り 3

(2)　$A(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x - 1$
$B(x) = x + 1$

解答
$A(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 1$
$= 1 - 1 - 2 - 5 - 1 = -8$
よって，余り -8

(3)　$A(x) = x^3 - 27$
$B(x) = x - 3$

解答
$A(3) = 3^3 - 27 = 0$
よって，余り 0

28　整式 $P(x)$ を 1 次式 $ax - b\ (a \neq 0)$ で割ったときの余りは $P\left(\frac{b}{a}\right)$ であることを以下の証明に続けて完成させなさい.

証明
$P(x)$ を $ax - b\ (a \neq 0)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると，
$P(x) = (ax - b)Q(x) + R$ とおくことができる.
ここで，x に $\frac{b}{a}$ を代入すると，

$$P\left(\frac{b}{a}\right) = \left(a \cdot \frac{b}{a} - b\right) Q\left(\frac{b}{a}\right) + R$$
$$= 0 \cdot Q\left(\frac{b}{a}\right) + R = R$$

よって，$P\left(\frac{b}{a}\right) = R$ となる.

29　整式 $x^3 - 2x^2 + 4x + 3$ をそれぞれ $2x - 1$，$2x + 3$ で割ったときの余りを求めなさい.

解答
$P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3$ とおくと，
$P(x)$ を $2x - 1$ で割ったときの余りは，

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3$$
$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 2 + 3 = \frac{37}{8}$$

$P(x)$ を $2x + 3$ で割ったときの余りは，

$$P\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3$$
$$= -\frac{27}{8} - \frac{9}{2} - 6 + 3 = -\frac{87}{8}$$

30　次の問いに答えなさい.

(1)　$x^3 + 10x^2 - ax + 6$ を，$x + 1$ で割った余りが 7 のとき，a の値を求めなさい.

解答
$P(x) = x^3 + 10x^2 - ax + 6$ とおくと，$P(-1) = 7$ となればよいので，
$(-1)^3 + 10 \cdot (-1)^2 - a \cdot (-1) + 6 = 7$
$-1 + 10 + a + 6 = 7$
よって，$a = -8$

(2)　$x^3 + ax^2 - 4x + 6$ を，$x - 2$ および $x - 3$ で割ったときの余りが等しくなるように，a の値を定めなさい.

解答
$P(x) = x^3 + ax^2 - 4x + 6$ とおくと，$P(2) = P(3)$ となればよいので，
$2^3 + a \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 3^3 + a \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 6$
$8 + 4a - 8 + 6 = 27 + 9a - 12 + 6$
$-5a = 15$
よって，$a = -3$

31　x の整式 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ると，$3x-1$ 余る．$P(x)$ を $x-1$ および $x+2$ で割ったときの余りを，それぞれ求めなさい．

解答

商を $Q(x)$ とおくと，題意より

$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+(3x-1)$ とおける．

ここで，$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは $P(1)$ だから

$$\begin{aligned}P(1)&=(1-1)(1+2)Q(1)+(3\cdot1-1)\\&=3-1=2\end{aligned}$$

よって，余りは 2

同様に，$P(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りは

$$\begin{aligned}P(-2)&=(-2-1)(-2+2)Q(-2)+(3\cdot(-2)-1)\\&=-6-1=-7\end{aligned}$$

よって，余りは -7

32　x^3+ax^2-4x+b を x^2-2x-3 で割ると $5(x+1)$ 余る．このとき，定数 a，b の値を求めなさい．

解答

商を $Q(x)$ とおくと，題意より

$$\begin{aligned}&x^3+ax^2-4x+b\\&=(x^2-2x-3)Q(x)+5(x+1)\\&=(x-3)(x+1)Q(x)+5(x+1)\end{aligned}$$

とおける．ここで，両辺に，$x=3$，$x=-1$ をそれぞれ代入すると，

$$27+9a-12+b=20$$

$$9a+b=5 \quad \cdots ①$$

$$-1+a+4+b=0$$

$$a+b=-3 \quad \cdots ②$$

①,②を連立させて解くと，

$a=1$，$b=-4$

33　次の問いに答えなさい．

(1)　x の整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると，5 余り，$x-3$ で割ると 9 余る．$P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めなさい．

解答

$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とおく．このとき，余りは 1 次式以下となるので，

$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$ とおける．

ここで，題意より $P(2)=5$，$P(3)=9$ なので，

$$\begin{cases}2a+b=5\\3a+b=9\end{cases}$$

これを解いて，$a=4$，$b=-3$

よって余りは，$4x-3$

(2)　整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ると余りが 1，$x-4$ で割ると余りが 11 であった．$P(x)$ を x^2-3x-4 で割ったときの余りを求めなさい．

解答

$P(x)$ を x^2-3x-4 すなわち $(x+1)(x-4)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とおく．このとき，余りは 1 次式以下となるので，

$P(x)=(x+1)(x-4)Q(x)+ax+b$ とおける．

ここで，題意より $P(-1)=1$，$P(4)=11$ なので，

$$\begin{cases}-a+b=1\\4a+b=11\end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$b=3$

よって余りは，$2x+3$

2　因数定理

34　次の問いに答えなさい．

(1)　整式 x^2-2x+a が $x-1$ で割り切れるように定数 a の値を定めなさい．

解答

$P(x)=x^2-2x+a$ とおくと，$P(x)$ が $x-1$ で割り切れるためには，$P(1)=0$ となればよいので

$1^2-2\cdot1+a=0$

$-1+a=0$

$a=1$

(2)　整式 x^3+5x^2+kx+2 が $x+2$ で割り切れるように定数 k の値を定めなさい．

解答

$P(x)=x^3+5x^2+kx+2$ とおくと，$P(x)$ が $x+2$ で割り切れるためには，$P(-2)=0$ となればよいので

$(-2)^3+5\cdot(-2)^2+k(-2)+2=0$

$-8+20-2k+2=0$

$-2k=-14$

$k=7$

35　組立除法を用いて，次の割り算の商と余りを求めなさい．

(1)　$(4x^3+x^2+6x-5)\div(x-1)$

解答

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & 1 & 6 & -5 & 1 \\ & 4 & 5 & 11 & \\ \hline 4 & 5 & 11 & 6 & \end{array}$$

商　$4x^2+5x+11$，余り　6

(2)　$(3x^3-x^2+3)\div(x+2)$

解答

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ & -6 & 14 & -28 & \\ \hline 3 & -7 & 14 & -25 & \end{array}$$

商　$3x^2-7x+14$，余り　-25

36　次の式を因数分解しなさい．

(1)　x^3+x^2-3x+1

解答

$P(x)=x^3+x^2-3x+1$ とおくと，

$P(1)=1^3+1^2-3\cdot1+1=0$ なので，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & -1 & \\ \hline 1 & 2 & -1 & 0 & \end{array}$$

よって，

$P(x)=(x-1)(x^2+2x-1)$

(2)　$x^3+2x^2-11x-12$

解答

$P(x)=x^3+2x^2-11x-12$ とおくと，

$P(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-11\cdot(-1)-12=0$

なので，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -11 & -12 & -1 \\ & -1 & -1 & 12 & \\ \hline 1 & 1 & -12 & 0 & \end{array}$$

よって，

$P(x)=(x+1)(x^2+x-12)$

$=(x+1)(x+4)(x-3)$

(3)　$2x^3-7x^2+7x-2$

解答

$P(x)=2x^3-7x^2+7x-2$ とおくと，

$P(1)=0$ なので，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -7 & 7 & -2 & 1 \\ & 2 & -5 & 2 & \\ \hline 2 & -5 & 2 & 0 & \end{array}$$

よって，

$P(x)=(x-1)(2x^2-5x+2)$

$=(x-1)(2x-1)(x-2)$

(4)　$x^4+3x^3-5x^2-3x+4$

解答

$P(x)=x^4+3x^3-5x^2-3x+4$ とおくと，

$P(1)=0$ なので，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & -5 & -3 & 4 & 1 \\ & 1 & 4 & -1 & -4 & \\ \hline 1 & 4 & -1 & -4 & 0 & \end{array}$$

よって，

$P(x)=(x-1)(x^3+4x^2-x-4)$

$Q(x)=x^3+4x^2-x-4$ とおくと，

$Q(1)=0$ なので，$Q(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & -1 & -4 & 1 \\ & 1 & 5 & 4 & \\ \hline 1 & 5 & 4 & 0 & \end{array}$$

よって，

$Q(x)=(x-1)(x^2+5x+4)$

以上より，

$$\begin{aligned} P(x)&=(x-1)(x-1)(x^2+5x+4) \\ &=(x-1)^2(x+1)(x+4) \end{aligned}$$

(5)　$x^4-x^3-6x^2+4x+8$

解答

$P(x)=x^4-x^3-6x^2+4x+8$ とおくと，

$P(-1)=0$ なので，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -6 & 4 & 8 & -1 \\ & -1 & 2 & 4 & -8 & \\ \hline 1 & -2 & -4 & 8 & 0 & \end{array}$$

よって，

$P(x)=(x+1)(x^3-2x^2-4x+8)$

$Q(x)=x^3-2x^2-4x+8$ とおくと，

$Q(2)=0$ なので，$Q(x)$ は $x-2$ を因数にもつ．

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ & 2 & 0 & -8 & \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

よって，

$Q(x)=(x-2)(x^2-4)$

以上より，

$$\begin{aligned} P(x)&=(x+1)(x-2)(x^2-4) \\ &=(x+1)(x-2)(x-2)(x+2) \\ &=(x+1)(x+2)(x-2)^2 \end{aligned}$$

37　次の問いに答えなさい．

(1)　整式 ax^3+bx^2-7x+6 が $x+2$ で割り切れ，$x-3$ で割ると 30 余るとき，定数 a，b の値を求めなさい．

解答

$P(x)=ax^3+bx^2-7x+6$ とおく．

$P(x)$ は $x+2$ で割り切れるので，$P(-2)=0$

よって，

$a\cdot(-2)^3+b\cdot(-2)^2-7\cdot(-2)+6=0$

$2a-b=5\cdots$①

$P(x)$ を $x-3$ で割ると 30 余るので，$P(3)=30$

よって，

$a\cdot 3^3+b\cdot 3^2-7\cdot 3+6=30$

$3a+b=5\cdots$②

①, ② を連立させて解くと，$a=2$，$b=-1$

(2)　x の整式 $3x^3+ax^2+bx-2$ は $3x-2$ で割り切れ，$x+1$ で割ると -20 余るという．定数 a，b の値を求めなさい．

解答

$P(x)=3x^3+ax^2+bx-2$ とおく．

$P(x)$ は $3x-2$ で割り切れるので，$P\left(\dfrac{2}{3}\right)=0$

よって，

$3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+a\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+b\cdot\dfrac{2}{3}-2=0$

$2a+3b=5\cdots$①

$P(x)$ を $x+1$ で割ると -20 余るので，

$P(-1)=-20$

よって，

$3\cdot(-1)^3+a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)-2=-20$

$a-b=-15\cdots$②

①, ② を連立させて解くと，$a=-8$，$b=7$

§２　いろいろな数と式

2.1　分数式の計算

1　約分・乗除

38　次の分数式を既約分数になおしなさい．

(1)　$\dfrac{16xy^2z}{12x^3yz^4}$

解答

与式 $= \dfrac{4y}{3x^2z^3}$

(2)　$\dfrac{x^2-2x-3}{x^3-6x^2+9x}$

解答

与式 $= \dfrac{(x-3)(x+1)}{x(x-3)^2}$

$= \dfrac{x+1}{x(x-3)}$

(3)　$\dfrac{a^2-(b+c)^2}{(a+b)^2-c^2}$

解答

与式 $= \dfrac{\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}}{\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}}$

$= \dfrac{(a+b+c)(a-b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)}$

$= \dfrac{a-b-c}{a+b-c}$

(4)　$\dfrac{a^3-a^2b+ab^2}{a^3+b^3}$

解答

与式 $= \dfrac{a(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

$= \dfrac{a}{a+b}$

39　次の分数式を計算しなさい．

(1)　$\dfrac{3bc}{2a^2} \times \dfrac{8a}{9b^2c}$

解答

与式 $= \dfrac{4}{3ab}$

(2)　$\dfrac{x^2+x}{x^2-x-6} \times \dfrac{x^2-3x}{x^2-1} \div \dfrac{x^2}{x^2+x-2}$

解答

与式 $= \dfrac{x(x+1)}{(x-3)(x+2)} \times \dfrac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)}$

$\times \dfrac{(x+2)(x-1)}{x^2}$

$= 1$

(3)　$\dfrac{t^2-3t}{t-5} \div \dfrac{t^3-6t^2+9t}{t^2-11t+30}$

解答

与式 $= \dfrac{t(t-3)}{t-5} \times \dfrac{(t-6)(t-5)}{t(t-3)^2}$

$= \dfrac{t-6}{t-3}$

(4)　$\dfrac{10y^2}{x(x-y)} \times \dfrac{y-x}{5y^3}$

解答

与式 $= \dfrac{10y^2}{x(x-y)} \times \dfrac{-(x-y)}{5y^3}$

$= -\dfrac{2}{xy}$

2 加減

40 次の分数式を計算しなさい．

(1) $\dfrac{3t+1}{t+1}+\dfrac{t+1}{t-1}$

解答

与式 $=\dfrac{(3t+1)(t-1)}{(t+1)(t-1)}+\dfrac{(t+1)^2}{(t-1)(t+1)}$

$=\dfrac{(3t^2-2t-1)+(t^2+2t+1)}{(t+1)(t-1)}$

$=\dfrac{4t^2}{(t+1)(t-1)}$

(2) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$

解答

与式 $=\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}-\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}$

$=\dfrac{(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)}{(a+b)(a-b)}$

$=\dfrac{4ab}{(a+b)(a-b)}$

(3) $x+\dfrac{xy}{x-y}$

解答

与式 $=\dfrac{x(x-y)}{x-y}+\dfrac{xy}{x-y}$

$=\dfrac{x^2-xy+xy}{x-y}$

$=\dfrac{x^2}{x-y}$

(4) $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

解答

与式 $=\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{2xy}{(x+y)(x-y)}$

$=\dfrac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}+\dfrac{2xy}{(x+y)(x-y)}$

$=\dfrac{x^2-2xy+y^2+2xy}{(x+y)(x-y)}$

$=\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)(x-y)}$

(5) $\dfrac{a}{ab-b^2}-\dfrac{b}{a^2-ab}$

解答

与式 $=\dfrac{a}{b(a-b)}-\dfrac{b}{a(a-b)}$

$=\dfrac{a^2}{ab(a-b)}-\dfrac{b^2}{ab(a-b)}$

$=\dfrac{a^2-b^2}{ab(a-b)}$

$=\dfrac{(a+b)(a-b)}{ab(a-b)}$

$=\dfrac{a+b}{ab}$

(6) $\dfrac{x+5}{x^2+x-2}-\dfrac{x+3}{x^2-4x+3}$

解答

与式 $=\dfrac{x+5}{(x-1)(x+2)}-\dfrac{x+3}{(x-1)(x-3)}$

$=\dfrac{(x+5)(x-3)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

$-\dfrac{(x+3)(x+2)}{(x-1)(x-3)(x+2)}$

$=\dfrac{(x^2+2x-15)-(x^2+5x+6)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

$=\dfrac{-3x-21}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

$=-\dfrac{3(x+7)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

(7) $\dfrac{1}{2a-1}+\dfrac{1}{2a+1}-\dfrac{2}{4a^2-1}$

解答

与式 $=\dfrac{2a+1}{(2a-1)(2a+1)}$

$+\dfrac{2a-1}{(2a+1)(2a-1)}$

$-\dfrac{2}{(2a+1)(2a-1)}$

$=\dfrac{2a+1+2a-1-2}{(2a+1)(2a-1)}$

$=\dfrac{4a-2}{(2a+1)(2a-1)}$

$=\dfrac{2(2a-1)}{(2a+1)(2a-1)}$

$=\dfrac{2}{2a+1}$

3　繁分数式

41　次の繁分数式を簡単にしなさい．

(1) $\dfrac{\dfrac{bc}{ad}}{\dfrac{b^2}{a}}$

解答

与式 $= \dfrac{\dfrac{bc}{ad} \times ad}{\dfrac{b^2}{a} \times ad} = \dfrac{bc}{b^2 d} = \dfrac{c}{bd}$

(2) $\dfrac{a - \dfrac{1}{a}}{1 - \dfrac{1}{a}}$

解答

与式 $= \dfrac{\left(a - \dfrac{1}{a}\right) \times a}{\left(1 - \dfrac{1}{a}\right) \times a} = \dfrac{a^2 - 1}{a - 1}$

$= \dfrac{(a+1)(a-1)}{a-1} = a + 1$

(3) $\dfrac{x-2}{1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{10}{x^2}}$

解答

与式 $= \dfrac{(x-2) \times x^2}{\left(1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{10}{x^2}\right) \times x^2}$

$= \dfrac{x^2(x-2)}{x^2 + 3x - 10} = \dfrac{x^2(x-2)}{(x+5)(x-2)}$

$= \dfrac{x^2}{x+5}$

(4) $\dfrac{x + y - \dfrac{6y^2}{x}}{1 - \dfrac{2y}{x}}$

解答

与式 $= \dfrac{\left(x + y - \dfrac{6y^2}{x}\right) \times x}{\left(1 - \dfrac{2y}{x}\right) \times x}$

$= \dfrac{x^2 + xy - 6y^2}{x - 2y} = \dfrac{(x+3y)(x-2y)}{x-2y}$

$= x + 3y$

(5) $\dfrac{\dfrac{2}{t-2} + 1}{\dfrac{2}{t+2} - 1}$

解答

与式 $= \dfrac{\left(\dfrac{2}{t-2} + 1\right) \times (t-2)(t+2)}{\left(\dfrac{2}{t+2} - 1\right) \times (t-2)(t+2)}$

$= \dfrac{2(t+2) + (t-2)(t+2)}{2(t-2) - (t-2)(t+2)}$

$= \dfrac{(t+2)\{2 + (t-2)\}}{(t-2)\{2 - (t+2)\}}$

$= \dfrac{t(t+2)}{-t(t-2)} = -\dfrac{t+2}{t-2}$

(6) $\dfrac{a - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{a}}}{a + \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{a}}}$

解答

与式 $= \dfrac{a - \dfrac{1 \times a}{\left(1 + \dfrac{1}{a}\right) \times a}}{a + \dfrac{1 \times a}{\left(1 - \dfrac{1}{a}\right) \times a}}$

$= \dfrac{a - \dfrac{a}{a+1}}{a + \dfrac{a}{a-1}} = \dfrac{\dfrac{a(a+1) - a}{a+1}}{\dfrac{a(a-1) + a}{a-1}}$

$= \dfrac{\dfrac{a^2}{a+1}}{\dfrac{a^2}{a-1}} = \dfrac{\dfrac{a^2}{a+1} \times \dfrac{(a+1)(a-1)}{a^2}}{\dfrac{a^2}{a-1} \times \dfrac{(a+1)(a-1)}{a^2}}$

$= \dfrac{a-1}{a+1}$

(7) $1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x}}}}$

解答

与式 $= 1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1 \times x}{\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \times x}}}$

$= 1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{x-1}}}$

$= 1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1 \times (x-1)}{\left(1 - \dfrac{x}{x-1}\right) \times (x-1)}}$

$= 1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{x-1}{-1}} = 1 - \dfrac{1}{1 + x - 1}$

$= 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

4　分母と分子の次数

42　次の分数式を，分子の次数が分母の次数より低くなるように変形しなさい．

(1)　$\dfrac{4x^2+3x-1}{x-2}$

解答

$$
\begin{array}{r|l}
 & \,4x+11 \\
x-2 & \overline{)\,4x^2+3x-1} \\
 & \,\underline{4x^2-8x} \\
 & \,11x-1 \\
 & \,\underline{11x-22} \\
 & \,21
\end{array}
$$

よって，与式 $=4x+11+\dfrac{21}{x-2}$

(2)　$\dfrac{-5x^3+x^2+2x-9}{x^2+x+1}$

解答

$$
\begin{array}{r|l}
 & \,-5x+6 \\
x^2+x+1 & \overline{)\,-5x^3+x^2+2x-9} \\
 & \,\underline{-5x^3-5x^2-5x} \\
 & \,6x^2+7x-9 \\
 & \,\underline{6x^2+6x+6} \\
 & \,x-15
\end{array}
$$

よって，与式 $=-5x+6+\dfrac{x-15}{x^2+x+1}$

43　次の分数式を，分子の次数が分母の次数より低くして計算しなさい．

(1)　$\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+2}{x+1}$

解答

$$
\begin{array}{r|l}
 & \,1 \\
x & \overline{)\,x+1} \\
 & \,\underline{x} \\
 & \,1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
 & \,1 \\
x+1 & \overline{)\,x+2} \\
 & \,\underline{x+1} \\
 & \,1
\end{array}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\\
&=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\\
&=\frac{x+1-x}{x(x+1)}\\
&=\frac{1}{x(x+1)}
\end{aligned}
$$

(2)　$\dfrac{x^3+x^2-x+1}{x+1}+\dfrac{x+x^2-x^3}{x-1}$

解答

組立除法を用いて

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 & -1 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & -1 & 2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & -1 & 0 & 1 & \\
\hline
-1 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=\left(x^2-1+\frac{2}{x+1}\right)\\
&\qquad+\left(-x^2+1+\frac{1}{x-1}\right)\\
&=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}\\
&=\frac{2(x-1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)}\\
&=\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)}
\end{aligned}
$$

(3)　$\dfrac{x^3-2x^2-x+4}{x^2-3x+2}-\dfrac{x^3-3x^2-x+6}{x^2-4x+3}$

解答

$$
\begin{array}{r|l}
 & \,x+1 \\
x^2-3x+2 & \overline{)\,x^3-2x^2-x+4} \\
 & \,\underline{x^3-3x^2+2x} \\
 & \,x^2-3x+4 \\
 & \,\underline{x^2-3x+2} \\
 & \,2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \,x+1 \\
x^2-4x+3 & \overline{)\,x^3-3x^2-x+6} \\
 & \,\underline{x^3-4x^2+3x} \\
 & \,x^2-4x+6 \\
 & \,\underline{x^2-4x+3} \\
 & \,3
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=\left(x+1+\frac{2}{x^2-3x+2}\right)\\
&\qquad-\left(x+1+\frac{3}{x^2-4x+3}\right)\\
&=\frac{2}{(x-2)(x-1)}-\frac{3}{(x-3)(x-1)}\\
&=\frac{2(x-3)-3(x-2)}{(x-2)(x-3)(x-1)}\\
&=-\frac{x}{(x-2)(x-3)(x-1)}
\end{aligned}
$$

2.2 実数

44 次の値を求めなさい.

(1) $|7|$

解答

$7>0$ より

与式 $=7$

(2) $|-2.7|$

解答

$-2.7<0$ より

与式 $=-(-2.7)=2.7$

(3) $\left|-\frac{3}{5}\right|$

解答

$-\frac{3}{5}<0$ より

与式 $=-\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}$

(4) $|9-4|$

解答

与式 $=|5|$

$=5$

(5) $|-1-8|$

解答

与式 $=|-9|$

$=-(-9)=9$

(6) $\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|$

解答

与式 $=\left|\frac{2-3}{6}\right|=\left|-\frac{1}{6}\right|$

$=-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$

45 次の計算をしなさい.

(1) $|1-3|-3$

解答

与式 $=|-2|-3$

$=2-3=-1$

(2) $2-|3-4|$

解答

与式 $=2-|-1|$

$=2-1=1$

(3) $4-\big||5-7|-8\big|$

解答

与式 $=4-\big||-2|-8\big|$

$=4-|2-8|$

$=4-|-6|$

$=4-6=-2$

46 x が次の数であるとき, $|x-1|+|x-2|$ の値を求めなさい.

(1) $x=0$

解答

与式 $=|0-1|+|0-2|$

$=|-1|+|-2|$

$=1+2=3$

(2) $x=\pi$

解答

与式 $=|\pi-1|+|\pi-2|$

$=(\pi-1)+(\pi-2)$

$=2\pi-3$

(3) $x=\frac{\pi}{2}$

解答

与式 $=\left|\frac{\pi}{2}-1\right|+\left|\frac{\pi}{2}-2\right|$

$=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\left(\frac{\pi}{2}-2\right)$

$=1$

2.3 平方根

47 次の式を計算しなさい．

(1) $\sqrt{5}+\sqrt{20}$

解答

$$与式 = \sqrt{5}+2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

(2) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$

解答

$$与式 = 2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

(3) $\sqrt{20}-\sqrt{45}+4\sqrt{5}$

解答

$$与式 = 2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+4\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

(4) $\sqrt{15}\sqrt{10}-2\sqrt{54}+3\sqrt{24}$

解答

$$与式 = \sqrt{5\cdot 3}\sqrt{5\cdot 2}-2\cdot 3\sqrt{6}+3\cdot 2\sqrt{6} = 5\sqrt{6}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

(5) $\sqrt{32}\div 2\sqrt{50}$

解答

$$与式 = 4\sqrt{2}\div 2\cdot 5\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\div 10\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{2}{5}$$

(6) $(\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})$

解答

$$\begin{aligned}与式 &= \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} \\ &\qquad -3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} \\ &= 6+\sqrt{6}-6\sqrt{6}-6 \\ &= -5\sqrt{6}\end{aligned}$$

(7) $(\sqrt{3}-1\div\sqrt{3})^2$

解答

$$\begin{aligned}与式 &= \left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= 3-2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3} \\ &= 3-2+\frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

(8) $(3+2\sqrt{5})^2-(3-2\sqrt{5})^2$

解答

$$\begin{aligned}与式 &= \{(3+2\sqrt{5})+(3-2\sqrt{5})\} \\ &\qquad \times\{(3+2\sqrt{5})+(3-2\sqrt{5})\} \\ &= 6\cdot 4\sqrt{5} \\ &= 24\sqrt{5}\end{aligned}$$

(9) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

解答

$$\begin{aligned}与式 &= 1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2 \\ &\qquad +2\cdot 1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{3}) \\ &\qquad +2\cdot(-\sqrt{3})\cdot 1 \\ &= 1+2+3+2\sqrt{2}-2\sqrt{6}-2\sqrt{3} \\ &= 6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}\end{aligned}$$

48　次の式の分母を有理化しなさい．

(1) $\dfrac{14}{5\sqrt{7}}$

解答

与式 $= \dfrac{14\cdot\sqrt{7}}{5\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}$

$= \dfrac{14\sqrt{7}}{5\cdot 7}$

$= \dfrac{2\sqrt{7}}{5}$

(2) $\dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$

解答

与式 $= \dfrac{1\cdot(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$

$= \dfrac{3+\sqrt{5}}{9-5}$

$= \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

解答

与式 $= \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$

$= \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{5-2}$

$= \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$

(4) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

解答

与式 $= \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$= \dfrac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2}$

$= 5+2\sqrt{6}$

(5) $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$

解答

与式 $= \dfrac{(3+2\sqrt{2})^2}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$

$= \dfrac{9+12\sqrt{2}+8}{9-8}$

$= 17+12\sqrt{2}$

49　次の式を計算しなさい．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$

解答

与式 $= \dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$+ \dfrac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{3-1}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{3-1}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)}{2}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$

解答

与式 $= \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$+ \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$+ \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1}+\dfrac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2}$

$+ \dfrac{2\sqrt{3}+3+2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4-3}$

$= (3-2\sqrt{2})+(5-2\sqrt{6})$

$+ (3+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{6})$

$= 11+2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

解答

与式 $= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}$

$= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(2+2\sqrt{6}+3)-5}$

$= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$

$= \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$

$= \dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

50 次の式を計算しなさい．

(1) $|\sqrt{5}-2|+|\sqrt{5}-5|$

解答

$\sqrt{5}-2>0$，$\sqrt{5}-5<0$ なので，

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (\sqrt{5}-2)+\{-(\sqrt{5}-5)\}\\ &= (\sqrt{5}-2)-(\sqrt{5}-5)\\ &= 3\end{aligned}$$

(2) $|2\sqrt{6}-5||2\sqrt{6}+5|$

解答

$$\begin{aligned}\text{与式} &= |(2\sqrt{6}-5)(2\sqrt{6}+5)|\\ &= |(2\sqrt{6})^2-5^2| = |24-25|\\ &= |-1| = 1\end{aligned}$$

(3) $|\sqrt{2}-2|^2+|\sqrt{2}+2|^2$

解答

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (\sqrt{2}-2)^2+(\sqrt{2}+2)^2\\ &= (2-4\sqrt{2}+4)+(2+4\sqrt{2}+4)\\ &= 12\end{aligned}$$

51 次の式を計算しなさい．

(1) $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$

解答

$$\begin{aligned}\text{与式} &= |\sqrt{2}-2| = -(\sqrt{2}-2)\\ &= -\sqrt{2}+2\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{(5-3\sqrt{2})^2}$

解答

$$\begin{aligned}\text{与式} &= |5-3\sqrt{2}|\\ &= 5-3\sqrt{2}\end{aligned}$$

(3) $\sqrt{\pi^2-8\pi+16}$

解答

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \sqrt{(\pi-4)^2} = |\pi-4|\\ &= -(\pi-4) = -\pi+4\end{aligned}$$

(4) $\sqrt{1-2\pi+\pi^2}$

解答

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \sqrt{(1-\pi)^2} = |1-\pi|\\ &= -(1-\pi) = -1+\pi\end{aligned}$$

52 $a=\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$，$b=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$ のとき，次の式の値を求めなさい．

(1) $a+b$

解答

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \frac{2}{3+\sqrt{5}}+\frac{2}{3-\sqrt{5}}\\ &= \frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}\\ &\qquad +\frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}\\ &= \frac{6-2\sqrt{5}+6+2\sqrt{5}}{9-5}\\ &= \frac{12}{4} = 3\end{aligned}$$

(2) ab

解答

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \frac{2}{3+\sqrt{5}}\times\frac{2}{3-\sqrt{5}}\\ &= \frac{4}{9-5} = 1\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

解答

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}\\ &= \frac{a+b}{ab}\\ &= \frac{3}{1} = 3\end{aligned}$$

(4) a^2+b^2

解答

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (a+b)^2-2ab\\ &= 3^2-2\cdot 1 = 7\end{aligned}$$

53 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a，b の値を求めなさい．

解答

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-\sqrt{3}} &= \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{4-3}\\ &= 2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

$1<\sqrt{3}<2$ なので，$3<2+\sqrt{3}<4$

よって

$a=3$

$b=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

54　次の 2 重根号をはずしなさい．

(1)　$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

解答

与式 $=\sqrt{(3+2)+2\sqrt{3\cdot 2}}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(2)　$\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

解答

与式 $=\sqrt{(2+1)-2\sqrt{2\cdot 1}}$

$=\sqrt{2}-\sqrt{1}=\sqrt{2}-1$

(3)　$\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

解答

与式 $=\sqrt{7-2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\cdot 3}}$

$=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$

(4)　$\sqrt{27-\sqrt{200}}$

解答

与式 $=\sqrt{27-2\sqrt{50}}$

$=\sqrt{(25+2)-2\sqrt{25\cdot 2}}$

$=\sqrt{25}-\sqrt{2}=5-\sqrt{2}$

(5)　$\sqrt{2+\sqrt{3}}$

解答

与式 $=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\cdot 1}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

(6)　$\sqrt{4-\sqrt{7}}$

解答

与式 $=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{7}}{2}}=\dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{7}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(7+1)-2\sqrt{7\cdot 1}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$

55　次の計算をしなさい．

(1)　$\sqrt{1+x-2\sqrt{x}}$　$(x \geqq 1)$

解答

与式 $=\sqrt{(1+x)-2\sqrt{1\cdot x}}$

$=\sqrt{x}-\sqrt{1}=\sqrt{x}-1$

(2)　$\sqrt{1+2\sqrt{a(1-a)}}$　$(0 \leqq a \leqq 1)$

解答

与式 $=\sqrt{\{a+(1-a)\}+2\sqrt{a(1-a)}}$

$=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$

56　$\dfrac{8}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ の値を求めなさい．

解答

$\dfrac{8}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}-1}$

$=\dfrac{8\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}$

$=\dfrac{8\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}$

$=2(\sqrt{5}+1)=2\sqrt{5}+2$

ここで，$4<2\sqrt{5}<5$ より，$6<2\sqrt{5}+2<7$ なので

$a=6$

また，$b=2\sqrt{5}+2-6=2\sqrt{5}-4$

よって

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{2\sqrt{5}+2}{6(2\sqrt{5}-4)}$

$=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{12(\sqrt{5}-2)}$

$=\dfrac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+2)}{6(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$

$=\dfrac{5+3\sqrt{5}+2}{6(5-4)}$

$=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{6}$

2.4 複素数

1 複素数

57 次の式を計算しなさい．

(1) $(2+3i)+(3-4i)$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= 2+3i+3-4i \\
&= (2+3)+(3-4)i \\
&= 5-i
\end{aligned}
$$

(2) $(4+5i)-(2+2i)$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= 4+5i-2-2i \\
&= (4-2)+(5-2)i \\
&= 2+3i
\end{aligned}
$$

(3) $(1+2i)(3+4i)$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= 3+4i+6i+8i^2 \\
&= 3+10i+8\cdot(-1) \\
&= -5+10i
\end{aligned}
$$

(4) $(3-2i)(i-4)$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= 3i-12-2i^2+8i \\
&= -12+11i-2\cdot(-1) \\
&= -10+11i
\end{aligned}
$$

(5) $\dfrac{1-2i}{3+4i}$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{(1-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} \\
&= \frac{3-4i-6i+8i^2}{9-16i^2} \\
&= \frac{-5-10i}{25} \\
&= -\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i
\end{aligned}
$$

(6) $\dfrac{1-i}{1+i}$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} \\
&= \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} \\
&= \frac{-2i}{2} \\
&= -i
\end{aligned}
$$

(7) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{2-3i}$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{1\cdot i}{i\cdot i}+\frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} \\
&= \frac{i}{i^2}+\frac{2+3i}{4-9i^2} \\
&= \frac{i}{-1}+\frac{2+3i}{13} \\
&= \frac{-13i}{13}+\frac{2+3i}{13} \\
&= \frac{2-10i}{13} \\
&= \frac{2}{13}-\frac{10}{13}i
\end{aligned}
$$

(8) $\dfrac{1-\sqrt{5}i}{1+\sqrt{5}i}+\dfrac{1+\sqrt{5}i}{1-\sqrt{5}i}$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{(1-\sqrt{5}i)^2}{(1+\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i)} \\
&\qquad +\frac{(1+\sqrt{5}i)^2}{(1-\sqrt{5}i)(1+\sqrt{5}i)} \\
&= \frac{1-2\sqrt{5}i+5i^2}{1-5i^2}+\frac{1+2\sqrt{5}i+5i^2}{1-5i^2} \\
&= \frac{-4-2\sqrt{5}i}{6}+\frac{-4+2\sqrt{5}i}{6} \\
&= \frac{-8}{6}=-\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

(9) $\dfrac{1}{2i}\times(1+i)^2$

解答

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{(1+i)^2}{2i} \\
&= \frac{1+2i+i^2}{2i} \\
&= \frac{2i}{2i}=1
\end{aligned}
$$

58　次の計算をしなさい．

(1)　$\sqrt{-4}\sqrt{-9}$

解答

与式 $= \sqrt{4}\,i \times \sqrt{9}\,i$

$= 2\,i \times 3\,i$

$= 6\,i^2$

$= 6 \times (-1) = -6$

(2)　$\sqrt{-3} \times \sqrt{6}$

解答

与式 $= \sqrt{3}\,i \times \sqrt{6}$

$= \sqrt{18}\,i$

$= 3\sqrt{2}\,i$

(3)　$\sqrt{5} \times \sqrt{-5}$

解答

与式 $= \sqrt{5} \times \sqrt{5}\,i$

$= 5\,i$

(4)　$\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$

解答

与式 $= \dfrac{\sqrt{8}\,i}{\sqrt{2}\,i}$

$= \sqrt{\dfrac{8}{2}}$

$= \sqrt{4} = 2$

(5)　$\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}$

解答

与式 $= \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}\,i}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i}$

$= \dfrac{2}{i} = \dfrac{2\,i}{i^2} = -2\,i$

(6)　$\dfrac{\sqrt{-15}}{\sqrt{5}}$

解答

与式 $= \dfrac{\sqrt{15}\,i}{\sqrt{5}}$

$= \sqrt{\dfrac{15}{5}}\,i$

$= \sqrt{3}\,i$

(7)　$\sqrt{-4} - \sqrt{-9}$

解答

与式 $= \sqrt{4}\,i - \sqrt{9}\,i$

$= 2\,i - 3\,i = -i$

(8)　$(\sqrt{3} + \sqrt{-2})(\sqrt{2} - \sqrt{-3})$

解答

与式 $= (\sqrt{3} + \sqrt{2}\,i)(\sqrt{2} - \sqrt{3}\,i)$

$= \sqrt{6} - 3\,i + 2\,i - \sqrt{6}\,i^2$

$= \sqrt{6} - i + \sqrt{6}$

$= 2\sqrt{6} - i$

(9)　$(1 + \sqrt{-3})^2 + (1 - \sqrt{-3})^2$

解答

与式 $= (1 + \sqrt{3}\,i)^2 + (1 - \sqrt{3}\,i)^2$

$= (1 + 2\sqrt{3}\,i + 3\,i^2) + (1 - 2\sqrt{3}\,i + 3\,i^2)$

$= (-2 + 2\sqrt{3}\,i) + (-2 - 2\sqrt{3}\,i)$

$= -4$

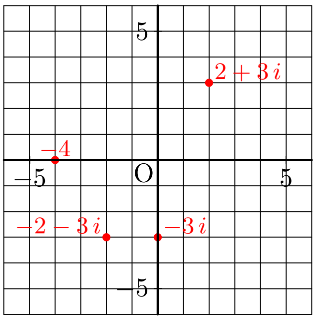
Tea Break

5　覆面算です．同じアルファベットには同じ数字が入ります．

```
      ONE
      TWO
+)   FOUR
    SEVEN
```

2　複素数平面

59　次の複素数の共役複素数を求め，複素数平面上に表しなさい．



(1)　$2-3i$

解答

$\overline{2-3i}=2+3i$

(2)　$-2+3i$

解答

$\overline{-2+3i}=-2-3i$

(3)　$3i$

解答

$\overline{3i}=\overline{0+3i}$

$=0-3i=-3i$

(4)　-4

解答

$\overline{-4}=\overline{-4+0i}$

$=-4-0i=-4$

60　次の計算をしなさい．

(1)　$3+i+\overline{3+i}$

解答

与式 $=3+i+(3-i)=6$

(2)　$(2-5i)(\overline{2-5i})$

解答

与式 $=(2-5i)(2+5i)$

$=4-25i^2$

$=4+25=29$

(3)　$\dfrac{1-2i}{\overline{1-2i}}$

解答

与式 $=\dfrac{1-2i}{1+2i}$

$=\dfrac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}$

$=\dfrac{1-4i+4i^2}{1-4i^2}=\dfrac{-3-4i}{5}$

$=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$

(4)　$\overline{\left(\dfrac{1}{i}\right)}+\bar{i}$

解答

与式 $=\overline{\left(\dfrac{i}{i^2}\right)}+(-i)$

$=\overline{\left(\dfrac{i}{-1}\right)}-i=\overline{-i}-i$

$=i-i=0$

61　次の複素数の絶対値を求めなさい．

(1)　$-5i$

解答

$|-5i|=\sqrt{0^2+(-5)^2}$

$=\sqrt{25}=5$

(2)　$-4+i$

解答

$|-4+i|=\sqrt{(-4)^2+1^2}$

$=\sqrt{17}$

(3)　$(2+3i)(3-2i)$

解答

$|(2+3i)(3-2i)|=|2+3i||3-2i|$

$=\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{3^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{13}\sqrt{13}=13$

(4)　$\dfrac{1}{2+i}$

解答

$\left|\dfrac{1}{2+i}\right|=\dfrac{|1|}{|2+i|}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

62　２つの複素数 $a+bi$ と $2-3i$ の和が純虚数，積が実数となるように，実数 a，b の値を定めなさい．

解答

２つの複素数の和は，

$(a+bi)+(2-3i)=(a+2)+(b-3)i$

となる．これが純虚数となるためには，

$a+2=0$，$b-3\neq 0$

すなわち，$a=-2$，$b\neq 3$　…①

また，２つの複素数の積は，

$(a+bi)(2-3i)=2a-3ai+2bi-3bi^2$

$=(2a+3b)+(-3a+2b)i$

となる．これが実数となるためには，

$-3a+2b=0$　…②

①より，$a=-2$ なので，これを②に代入して，

$6+2b=0$

$b=-3$

これは①を満たしている．よって，

$a=-2$，$b=-3$

第２章　方程式と不等式

§ 1　方程式

1.1　二次方程式

1　二次方程式の解法

63　次の方程式を解きなさい．

(1)　$x^2 = 64$

解答

$x = \pm\sqrt{64}$

$= \pm 8$

(2)　$x^2 + 16 = 0$

解答

$x^2 = -16$

$x = \pm\sqrt{-16}$

$= \pm\sqrt{16}\, i$

$= \pm 4\, i$

(3)　$x^2 - 5 = 0$

解答

$x^2 = 5$

$x = \pm\sqrt{5}$

(4)　$x^2 = -8$

解答

$x = \pm\sqrt{-8}$

$= \pm\sqrt{8}\, i$

$= \pm 2\sqrt{2}\, i$

(5)　$4x^2 - 3 = 0$

解答

$4x^2 = 3$

$x^2 = \dfrac{3}{4}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

$= \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(6)　$5x^2 = -1$

解答

$x^2 = -\dfrac{1}{5}$

$x = \pm\sqrt{-\dfrac{1}{5}}$

$= \pm\sqrt{\dfrac{1}{5}}\, i$

$= \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}\, i$

(7)　$(x-3)^2 = 25$

解答

$x - 3 = \pm 5$

$x = 3 \pm 5$

$x = 8,\ -2$

(8)　$(x+2)^2 = -9$

解答

$x + 2 = \pm\sqrt{-9}$

$x = -2 \pm \sqrt{9}\, i$

$= -2 \pm 3\, i$

(9)　$(3x+1)^2 = 2$

解答

$3x + 1 = \pm\sqrt{2}$

$3x = -1 \pm \sqrt{2}$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{3}$

(10)　$(2x-1)^2 = 0$

解答

$2x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{2}$

64　次の方程式を解きなさい．

(1)　$x^2 - 2x - 3 = 0$

解答

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = 3,\ -1$

(2)　$x^2 + 10x + 25 = 0$

解答

$(x+5)^2 = 0$

$x = -5$

(3)　$2x^2 + x - 6 = 0$

解答

$(2x-3)(x+2) = 0$

$x = \dfrac{3}{2},\ -2$

(4)　$7x^2 + 24x + 9 = 0$

解答

$(7x+3)(x+3) = 0$

$x = -\dfrac{3}{7},\ -3$

(5)　$9x^2 + 12x + 4 = 0$

解答

$(3x+2)^2 = 0$

$x = -\dfrac{2}{3}$

(6)　$5x^2 - 2x = 0$

解答

$x(5x-2) = 0$

$x = 0,\ \dfrac{2}{5}$

65　次の方程式を解きなさい．

(1)　$x^2 - 3x - 1 = 0$

解答

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

(2)　$5x^2 - 5x + 1 = 0$

解答

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5}$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

(3)　$3x^2 + 5x + 1 = 0$

解答

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$
$$= \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

(4)　$x^2 - 4x - 2 = 0$

解答

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot (-2)}}{1}$$
$$= 2 \pm \sqrt{6}$$

(5)　$2x^2 - 6x - 3 = 0$

解答

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 2 \cdot (-3)}}{2}$$
$$= \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$$

(6)　$x^2 + x + 3 = 0$

解答

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{11}\,i}{2}$$

(7)　$5x^2 - 3x + 5 = 0$

解答

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5}}{2 \cdot 5}$$
$$= \frac{3 \pm \sqrt{-91}}{10}$$
$$= \frac{3 \pm \sqrt{91}\,i}{10}$$

(8)　$2x^2 + 3x + 4 = 0$

解答

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{23}\,i}{4}$$

(9)　$x^2 - 4x + 5 = 0$

解答

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 5}}{1}$$
$$= 2 \pm \sqrt{-1}$$
$$= 2 \pm i$$

(10)　$4x^2 - 4x + 5 = 0$

解答

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5}}{4}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{4}$$
$$= \frac{2 \pm 4\,i}{4}$$
$$= \frac{1 \pm 2\,i}{2}$$

66　次の方程式を解きなさい．

(1)　$x^2+2x=18-x$

解答

$x^2+3x-18=0$

$(x+6)(x-3)=0$

$x=-6,\ 3$

(2)　$\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x-5=0$

解答

両辺を 2 倍して

$x^2+3x-10=0$

$(x+5)(x-2)=0$

$x=-5,\ 2$

(3)　$x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}=0$

解答

両辺を 2 倍して

$2x^2-x-5=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot(-5)}}{2\cdot2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{41}}{4}$$

(4)　$x^2+2\sqrt{2}x+1=0$

解答

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{2})^2-1\cdot1}}{1}$$

$$=-\sqrt{2}\pm\sqrt{1}=-\sqrt{2}\pm1$$

(5)　$x^2-2\sqrt{2}x+2=0$

解答

$$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{(-\sqrt{2})^2-1\cdot2}}{1}$$

$$=\sqrt{2}\pm\sqrt{0}=\sqrt{2}$$

〔別解〕

$x^2-2\sqrt{2}\,x+(\sqrt{2})^2=0$

$(x-\sqrt{2})^2=0$

$x=\sqrt{2}$

2　判別式

67　次の二次方程式の解を判別しなさい．

(1)　$2x^2-x-6=0$

解答

$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-6)$

$\quad=1+48=49>0$

よって，異なる 2 つの実数解をもつ．

(2)　$x^2-3x+4=0$

解答

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot4$

$\quad=9-16=-7<0$

よって，異なる 2 つの虚数解をもつ．

(3)　$9x^2-6x+1=0$

解答

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-9\cdot1$

$\quad=9-9=0$

よって，(2) 重解をもつ．

68　次の二次方程式が 2 重解をもつように定数 k の値を定めなさい．

(1)　$x^2-2kx-k+2=0$

解答

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot(-k+2)=0$

$k^2+k-2=0$

$(k+2)(k-1)=0$

よって，$k=1,\ -2$

(2)　$x^2-2(k+1)x+4k=0$

解答

$\dfrac{D}{4}=\{(-k+1)\}^2-1\cdot4k=0$

$k^2+2k+1-4k=0$

$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

よって，$k=1$

(3)　$kx^2+3kx+1=0$

解答

$k\neq 0$

$D=(3k)^2-4\cdot k\cdot 1=0$

$9k^2-4k=0$

$k(9k-4)=0$

$k=0,\ \dfrac{4}{9}$

$k\neq 0$ なので，$k=\dfrac{4}{9}$

(4)　$(k-1)x^2-x+1=0$

解答

$k-1\neq 0$ より，$k\neq 1$

$D=(-1)^2-4\cdot(k-1)\cdot 1=0$

$1-4k+4=0$

$-4k=-5$

$k=\dfrac{5}{4}$

(5)　$k(x-1)(x-2)=x^2$

解答

x について整理すると

$k(x^2-3x+2)-x^2=0$

$(k-1)x^2-3kx+2k=0$

$k-1\neq 0$ より，$k\neq 1$

$D=(-3k)^2-4\cdot(k-1)\cdot 2k=0$

$9k^2-8k^2+8k=0$

$k^2+8k=0$

$k(k+8)=0$

$k=0,\ -8$

(6)　$k(x^2-x)=3(x^2-x)-2$

解答

x について整理すると

$(k-3)x^2-(k-3)x+2=0$

$k-3\neq 0$ より，$k\neq 3$

$D=\{-(k-3)\}^2-4\cdot(k-3)\cdot 2=0$

$(k-3)^2-8(k-3)=0$

$(k-3)\{(k-3)-8\}=0$

$(k-3)(k-11)=0$

$k=3,\ 11$

$k\neq 3$ なので，$k=11$

69　次の二次方程式が 2 重解をもつように定数 k の値を定め，そのときの 2 重解を求めなさい．

(1)　$x^2-(k+2)x+3k+1=0$

解答

$D=\{-(k+2)\}^2-4\cdot 1\cdot(3k+1)=0$

$k^2+4k+4-12k-4=0$

$k^2-8k=0$

$k(k-8)=0$

よって，$k=0,\ 8$

i)　$k=0$ のとき

$x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2\cdot 1}=1$

ii)　$k=8$ のとき

$x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{10}{2\cdot 1}=5$

(2)　$kx^2+12x+(2k+1)=0$

解答

$k\neq 0$

$\dfrac{D}{4}=6^2-k(2k+1)=0$

$36-2k^2-k=0$

$2k^2+k-36=0$

$(2k+9)(k-4)=0$

よって，$k=-\dfrac{9}{2},\ 4$

i)　$k=-\dfrac{9}{2}$ のとき

$x=-\dfrac{12}{2\cdot\left(-\dfrac{9}{2}\right)}=\dfrac{4}{3}$

ii)　$k=4$ のとき

$x=-\dfrac{12}{2\cdot 4}=-\dfrac{3}{2}$

1.2 解と係数の関係

1 解と係数の関係

70　二次方程式 $3x^2+2x+6=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値をそれぞれ求めなさい．

解答

$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}$，　$\alpha\beta=\dfrac{6}{3}=2$

71　二次方程式 $2x^2-7x+9=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の各式の値を求めなさい．

(1)　$\alpha^2+\beta^2$

解答

$\alpha+\beta=\dfrac{7}{2}$，$\alpha\beta=\dfrac{9}{2}$

$$\begin{aligned}\text{与式}&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=\left(\frac{7}{2}\right)^2-2\cdot\frac{9}{2}\\&=\frac{49}{4}-9=\frac{13}{4}\end{aligned}$$

(2)　$(\alpha-2)(\beta-2)$

解答

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\alpha\beta-2\alpha-2\beta+4\\&=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\\&=\frac{9}{2}-2\cdot\frac{7}{2}+4=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(3)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

解答

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\frac{\beta^2}{\alpha\beta}+\frac{\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\\&=\frac{\frac{13}{4}}{\frac{9}{2}}=\frac{13}{18}\end{aligned}$$

(4)　$\alpha^3+\beta^3$

解答

$$\begin{aligned}\text{与式}&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=\left(\frac{7}{2}\right)^3-3\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\\&=\frac{343}{8}-\frac{189}{4}=-\frac{35}{8}\end{aligned}$$

〔別解〕

$$\begin{aligned}\text{与式}&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\\&=\frac{7}{2}\left(\frac{13}{4}-\frac{9}{2}\right)=-\frac{35}{8}\end{aligned}$$

72　二次方程式 $x^2-(2k+3)x+12=0$ の 1 つの解が，他の解より 1 だけ大きいとき，定数 k の値，およびそのときの解を求めなさい．

解答

1 つの解を α とすると，他の解は $\alpha+1$ と表せるので，解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+(\alpha+1)=2k+3 & \cdots ①\\ \alpha(\alpha+1)=12 & \cdots ②\end{cases}$$

② より，

$\alpha^2+\alpha-12=0$

$(\alpha+4)(\alpha-3)=0$

$\alpha=-4,\ 3$

①に代入して，

$\alpha=-4$ のとき，$k=-5$

$\alpha=3$ のとき，$k=2$

よって，

$k=-5$ のとき，$x=-4,\ -3$

$k=2$ のとき，$x=3,\ 4$

73　二次方程式 $x^2+3kx-k+3=0$ の 1 つの解が，他の解の 2 倍であるとき，定数 k の値，およびそのときの解を求めなさい．

解答

1 つの解を α とすると，他の解は 2α と表せるので，解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+2\alpha=-3k & \cdots ①\\ \alpha\cdot 2\alpha=-k+3 & \cdots ②\end{cases}$$

① より，$\alpha=-k\cdots①'$

これを ② に代入して

$2(-k)^2=-k+3$

$2k^2+k-3=0$

$(2k+3)(k-1)=0$

$k=-\dfrac{3}{2},\ 1$

①′に代入して，

$k=-\dfrac{3}{2}$ のとき，$\alpha=\dfrac{3}{2}$

$k=1$ のとき，$\alpha=-1$

よって，

$k=-\dfrac{3}{2}$ のとき，$x=\dfrac{3}{2},\ 3$

$k=1$ のとき，$x=-1,\ -2$

74　次の 2 つの数を解とする二次方程式を 1 つ求めなさい．

(1)　2，3

解答

$2+3=5,\ 2\times 3=6$

よって，求める方程式は

$x^2-5x+6=0$

(2)　$\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{2}{3}$

解答

$\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$

よって，求める方程式は

$x^2+\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{3}=0$

または

$6x^2+x-2=0$

(3)　$\dfrac{5+\sqrt{7}}{3},\ \dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$

解答

$\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}+\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}=\dfrac{10}{3}$

$\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}\times\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}=2$

よって，求める方程式は

$x^2-\dfrac{10}{3}x+2=0$

または

$3x^2-10x+6=0$

75　2 次方程式 $x^2-2x+7=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha+2$，$\beta+2$ を解とする 2 次方程式を 1 つ求めなさい．

解答

題意より，$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=7$ なので

$(\alpha+2)+(\beta+2)=\alpha+\beta+4=6$

$(\alpha+2)\times(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=15$

よって，求める方程式は

$x^2-6x+15=0$

2　二次式の因数分解

76　次の二次式を複素数の範囲で因数分解しなさい．

(1)　x^2-5x+3

解答

$x^2-5x+3=0$ を解くと

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-12}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

よって

与式 $=\left(x-\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$

(2)　$2x^2-4x+1$

解答

$2x^2-4x+1=0$ を解くと

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-2}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

よって

与式 $=2\left(x-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

(3)　$3x^2+2x+4$

解答

$3x^2+2x+4=0$ を解くと

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-12}}{3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{3}$

よって

与式 $=3\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{11}\,i}{3}\right)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{11}\,i}{3}\right)$

(4)　$4x^2+8x-1$

解答

$4x^2+8x-1=0$ を解くと

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+4}}{4}=\dfrac{-4\pm 2\sqrt{5}}{4}$

$=\dfrac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$

よって

与式 $=4\left(x-\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-2-\sqrt{5}}{2}\right)$

または，$(2x+2-\sqrt{5})(2x+2+\sqrt{5})$

1.3　いろいろな方程式

1　高次方程式

77　次の方程式を解きなさい.

(1)　$x^4-2x^2-35=0$

解答

$x^2=X$ とおくと

$X^2-2X-35=0$

$(X-7)(X+5)=0$

$(x^2-7)(x^2+5)=0$

$x^2-7=0$ より，$x=\pm\sqrt{7}$

$x^2+5=0$ より，$x=\pm\sqrt{5}\,i$

(2)　$2x^4-x^2-1=0$

解答

$x^2=X$ とおくと

$2X^2-X-1=0$

$(2X+1)(X-1)=0$

$(2x^2+1)(x^2-1)=0$

$x^2+\dfrac{1}{2}=0$ より，$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i$

$x^2-1=0$ より，$x=\pm 1$

よって，$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i,\ \pm 1$

(3)　$(x^2+2x)^2+7(x^2+2x)-18=0$

解答

$(x^2+2x)=X$ とおくと

$X^2+7X-18=0$

$(X-2)(X+9)=0$

$(x^2+2x-2)(x^2+2x+9)=0$

$x^2+2x-2=0$ より，$x=-1\pm\sqrt{3}$

$x^2+2x+9=0$ より，$x=-1\pm 2\sqrt{2}\,i$

よって，$x=-1\pm\sqrt{3},\ -1\pm 2\sqrt{2}\,i$

(4)　$(x^2-x-1)(x^2-x+2)=4$

解答

$(x^2-x)=X$ とおくと

$(X-1)(X+2)=4$

$X^2+X-6=0$

$(X+3)(X-2)=0$

$(x^2-x+3)(x^2-x-2)=0$

$x^2-x+3=0$ より

$x^2-x+3=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{-11}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{11}\,i}{2}$

$x^2-x-2=0$ より

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2,\ -1$

よって，$x=2,\ -1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{11}\,i}{2}$

(5)　$(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15=0$

解答

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$

$(x+1)(x+7)\times(x+3)(x+5)+15=0$

$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$

$(x^2+8x)=X$ とおくと

$(X+7)(X+15)+15=0$

$X^2+22X+105+15=0$

$X^2+22X+120=0$

$(X+10)(X+12)=0$

$(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)=0$

$x^2+8x+10=0$ より

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{6}}{1}=-4\pm\sqrt{6}$

$x^2+8x+12=0$ より

$(x+2)(x+6)=0$

$x=-2,\ -6$

よって，$x=-2,\ -6,\ -4\pm\sqrt{6}$

78　次の方程式を解きなさい．

(1)　$x^3=-1$

解答

$x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x+1=0$ より，$x=-1$

$x^2-x+1=0$ より，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

よって，$x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

(2)　$8x^3-1=0$

解答

$(2x-1)(4x^2+2x+1)=0$

$2x-1=0$ より，$x=\dfrac{1}{2}$

$4x^2+2x+1=0$ より，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{4}$

よって，$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{4}$

79　次の方程式を解きなさい．

(1)　$x^3-7x+6=0$

解答

$P(x)=x^3-7x+6$ とおくと

$P(1)=0$ なので

$$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3)$$

よって，$x=1,\ 2,\ -3$

(2)　$2x^3-7x^2+2x+3=0$

解答

$P(x)=2x^3-7x^2+2x+3$ とおくと

$P(1)=0$ なので

$$P(x)=(x-1)(2x^2-5x-3)$$
$$=(x-1)(2x+1)(x-3)$$

よって，$x=1,\ -\dfrac{1}{2},\ 3$

(3)　$x^4+x^3-x^2+x-2=0$

解答

$P(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$ とおくと

$P(1)=0$ なので

$$P(x)=(x-1)(x^3+2x^2+x+2)$$

$Q(x)=x^3+2x^2+x+2$ とおくと

$Q(-2)=0$ なので

$$P(x)=(x-1)(x+2)(x^2+1)$$

よって，$x=1,\ -2,\ \pm i$

(4)　$x^4-4x^3+10x^2-17x+10=0$

解答

$P(x)=x^4-4x^3+10x^2-17x+10$ とおくと

$P(1)=0$ なので

$$P(x)=(x-1)(x^3-3x^2+7x-10)$$

$Q(x)=x^3-3x^2+7x-10$ とおくと

$Q(2)=0$ なので

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x^2-x+5)$$

よって，$x=1,\ 2,\ \dfrac{1\pm\sqrt{19}\,i}{2}$

80　$x^4+x^2+1=0$ を解きなさい．

解答

$x^4+x^2+1+x^2-x^2=0$

$x^4+2x^2+1-x^2=0$

$(x^2+1)^2-x^2=0$

$(x^2+1+x)(x^2+1-x)=0$

$x^2+x+1=0$ より，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$x^2-x+1=0$ より，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

よって，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

2　連立方程式

81　次の方程式を解きなさい.

(1)
$$\begin{cases} x+y+z=3 & \cdots ① \\ 2x+3y-2z=-1 & \cdots ② \\ x+2y+3z=2 & \cdots ③ \end{cases}$$

解答

$$\begin{array}{lrl} ①\times 2 & 2x+2y+2z & =6 \\ ② & +)\ 2x+3y-2z & =-1 \\ \hline & 4x+5y & =5\cdots ④ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} ①\times 3 & 3x+3y+3z & =9 \\ ③ & -)\ x+2y+3z & =2 \\ \hline & 2x+y & =7\cdots ⑤ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} ⑤\times 5 & 10x+5y & =35 \\ ④ & -)\ 4x+5y & =5 \\ \hline & 6x & =30 \\ & x & =5\cdots ⑥ \end{array}$$

⑥を⑤に代入して，$y=-3\cdots ⑦$

⑥，⑦を①に代入して，$z=1$

よって，　$(x,y,z)=(5,\ -3,\ 1)$

(2)
$$\begin{cases} 3x-y=0 & \cdots ① \\ x-y+2z=6 & \cdots ② \\ 2x-3y+z=9 & \cdots ③ \end{cases}$$

解答

①より，$y=3x\cdots ①'$

これを，②，③に代入して

$x-3x+2z=6$

$-2x+2z=6\cdots ②'$

$2x-3\cdot 3x+z=9$

$-7x+z=9\cdots ③'$

$$\begin{array}{lrl} ②'\div 2 & -x+z & =3 \\ ③' & -)\ -7x+z & =9 \\ \hline & 6x & =-6 \\ & x & =-1\cdots ④ \end{array}$$

④を①' に代入して，$y=-3$

④を②' に代入して，$z=2$

よって，　$(x,y,z)=(-1,\ -3,\ 2)$

82　次の方程式を解きなさい.

(1)　$x+2y+4=2x-y+7=2y-x$

解答

$$\begin{cases} x+2y+4=2x-y+7 & \cdots ① \\ x+2y+4=2y-x & \cdots ② \end{cases}$$

①より，$-x+3y=3\quad\cdots ①'$

②より，$2x=-4$

$x=-2\quad\cdots ②'$

②' を①' に代入して

$2+3y=3$

$y=\dfrac{1}{3}$

よって，$(x,y)=\left(-2,\ \dfrac{1}{3}\right)$

(2)　$2x+3y-5z-3=x-y+z=3x-6y+2z+7=0$

解答

$$\begin{cases} 2x+3y-5z-3=0 & \cdots ① \\ x-y+z=0 & \cdots ② \\ 3x-6y+2z+7=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

$$\begin{array}{lrl} ②\times 3 & 3x-3y+3z & =0 \\ ① & +)\ 2x+3y-5z & =3 \\ \hline & 5x\quad -2z & =3\cdots ④ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} ①\times 2 & 4x+6y-10z & =6 \\ ③ & +)\ 3x-6y+2z & =-7 \\ \hline & 7x\quad -8z & =-1\cdots ⑤ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} ④\times 4 & 20x-8z & =12 \\ ⑤ & -)\ 7x-8z & =-1 \\ \hline & 13x & =13 \\ & x & =1\cdots ⑥ \end{array}$$

⑥を④に代入して，$z=1\quad\cdots ⑦$

⑥，⑦を②に代入して，$y=2$

よって，$(x,y,z)=(1,\ 2,\ 1)$

83

次の方程式を解きなさい．

(1) $\begin{cases} 2x+y=3 & \cdots ① \\ 2x^2-y^2-3y+2=0 & \cdots ② \end{cases}$

解答

①より，$y=-2x+3 \cdots ①'$

これを，②に代入して

$2x^2-(-2x+3)^2-3(-2x+3)+2=0$

$2x^2-(4x^2-12x+9)-6x-9+2=0$

$-2x^2+18x-16=0$

$x^2-9x+8=0$

$(x-1)(x-8)=0$

$x=1,\ 8$

これらを①' に代入して

$x=1$ のとき，$y=1$

$x=8$ のとき，$y=-13$

よって，　$(x,y)=(1,\ 1),\ (8,\ -13)$

(2) $\begin{cases} x-y=2 & \cdots ① \\ x^2+xy+y^2=5 & \cdots ② \end{cases}$

解答

①より $x=y+2 \quad \cdots ①'$

②に代入して

$(y+2)^2+(y+2)y+y^2=5$

$y^2+4y+4+y^2+2y+y^2-5=0$

$3y^2+6y-1=0$

$y=\dfrac{-3\pm\sqrt{(-3)^2-3\cdot(-1)}}{3}$

$=\dfrac{-3\pm2\sqrt{3}}{3} \cdots ③$

③を①' に代入

$x=\dfrac{-3\pm2\sqrt{3}}{3}+2=\dfrac{-3\pm2\sqrt{3}+6}{3}$

$=\dfrac{3\pm2\sqrt{3}}{3}$

よって

$(x,y)=\left(\dfrac{3\pm2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{-3\pm2\sqrt{3}}{3}\right)$ (複号同順)

84

次の方程式を解きなさい．

(1) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{2} & \cdots ① \\ 2x-3y+z+7=0 & \cdots ② \end{cases}$

解答

①において，　$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{2}=k$ とおくと

$x=3k,\ y=5k,\ z=2k \cdots ①'$

これらを，②に代入すると

$2\cdot3k-3\cdot5k+2k=-7$

$-7k=-7$

$k=1$

これを，①' に代入して

$x=3,\ y=5,\ z=2$

よって，　$(x,y,z)=(3,\ 5,\ 2)$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=16 & \cdots ① \\ y=x^2-4 & \cdots ② \end{cases}$

解答

②を①に代入すると

$x^2+(x^2-4)^2=16$

$x^2+(x^4-8x^2+16)=16$

$x^4-7x^2=0$

$x^2(x^2-7)=0$

$x^2=0,\ x^2=7$

よって，$x=0,\ \pm\sqrt{7}$

これらを②に代入して

$x=0$ のとき，$y=-4$

$x=\pm\sqrt{7}$のとき，$y=3$

よって，　$(x,y)=(0,\ -4),\ (\pm\sqrt{7},\ 3)$

3　分数方程式

85　次の方程式を解きなさい．

(1)　$\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}+2=0$

解答

両辺に (x^2-1) をかけると

$(x^2-3x)+(x+1)+2(x^2-1)=0$

$3x^2-2x-1=0$

$(3x+1)(x-1)=0$

$x=-\dfrac{1}{3},\ 1$

ここで，$x=1$ は元の方程式の分母を 0 にするので無縁解である．

よって，　$x=-\dfrac{1}{3}$

(2)　$\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{12}{x-2}=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$

解答

両辺に (x^2-4) をかけると，

$x(x-2)-12(x+2)=2x^2$

$x^2-2x-12x-24-2x^2=0$

$-x^2-14x-24=0$

$x^2+14x+24=0$

$(x+2)(x+12)=0$

$x=-2,\ -12$

ここで，$x=-2$ は元の方程式の分母を 0 にするので無縁解である．

よって，　$x=-12$

(3)　$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2}$

解答

両辺に $2(x-1)(x+2)$ をかけると

$2(x+2)+2(x-1)=(x-1)(x+2)$

$2x+4+2x-2=x^2+x-2$

$x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$

$x=4,\ -1$

(4)　$\dfrac{x-6}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-4}{x^2+x-2}$

解答

分母を因数分解すると

$\dfrac{x-6}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-4}{(x+2)(x-1)}$

両辺に $(x+2)(x-2)(x-1)$ をかけると

$(x-6)(x-1)+(x+2)(x-2)=(x-4)(x-2)$

$(x^2-7x+6)+(x^2-4)=x^2-6x+8$

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3,\ -2$

ここで，$x=-2$ は元の方程式の分母を 0 にするので無縁解である．

よって，　$x=3$

(5)　$\dfrac{3}{x^2-3x}-\dfrac{x+2}{x^2+x}-\dfrac{17x+1}{x^2-2x-3}=\dfrac{3x}{x+1}$

解答

分母を因数分解すると

$\dfrac{3}{x(x-3)}-\dfrac{x+2}{x(x+1)}-\dfrac{17x+1}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{3x}{x+1}$

両辺に $x(x-3)(x+1)$ をかけると

$3(x+1)-(x+2)(x-3)-x(17x+1)=3x^2(x-3)$

$3x+3-(x^2-x-6)-17x^2-x=3x^3-9x^2$

$3x^3+9x^2-3x-9=0$

$x^3+3x^2-x-3=0$

$P(x)=x^3+3x^2-x-3$ とおくと

$P(1)=0$ より

$P(x)=(x-1)(x^2+4x+3)$

$=(x-1)(x+1)(x+3)$

$x=1,\ -1,\ -3$

ここで，$x=-1$ は元の方程式の分母を 0 にするので無縁解である．

よって，　$x=1,\ -3$

4 無理方程式

86 次の方程式を解きなさい.

(1) $\sqrt{x+1}=x-5$

解答

両辺を 2 乗すると

$x+1=(x-5)^2$

$x+1=x^2-10x+25$

$x^2-11x+24=0$

$(x-3)(x-8)=0$

$x=3,\ 8$

i) $x=3$ のとき

左辺 $=2$, 右辺 $=-2$ 　不適

ii) $x=8$ のとき

左辺 $=3$, 右辺 $=3$

よって $x=8$

(2) $\sqrt{x+3}=x-3$

解答

両辺を 2 乗すると

$x+3=(x-3)^2$

$x+3=x^2-6x+9$

$x^2-7x+6=0$

$(x-1)(x-6)=0$

$x=1,\ 6$

i) $x=1$ のとき

左辺 $=2$, 右辺 $=-2$ 　不適

ii) $x=6$ のとき

左辺 $=3$, 右辺 $=3$

よって $x=6$

(3) $\sqrt{25-x^2}=x-1$

解答

両辺を 2 乗すると

$25-x^2=(x-1)^2$

$25-x^2=x^2-2x+1$

$2x^2-2x-24=0$

$x^2-x-12=0$

$(x-4)(x+3)=0$

$x=4,\ -3$

i) $x=4$ のとき

左辺 $=3$, 右辺 $=3$

ii) $x=-3$ のとき

左辺 $=4$, 右辺 $=-4$ 　不適

よって $x=4$

(4) $\sqrt{x^2+16}=3x-4$

解答

両辺を 2 乗すると

$x^2+16=(3x-4)^2$

$x^2+16=9x^2-24x+16$

$8x^2-24x=0$

$x(x-3)=0$

$x=0,\ 3$

i) $x=0$ のとき

左辺 $=4$, 右辺 $=-4$ 　不適

ii) $x=3$ のとき

左辺 $=5$, 右辺 $=5$

よって $x=3$

(5) $\sqrt{3x-5}+10=2x$

解答

$\sqrt{3x-5}=2x-10$

両辺を 2 乗すると

$3x-5=(2x-10)^2$

$3x-5=4x^2-40x+100$

$4x^2-43x+105=0$

$(x-7)(4x-15)=0$

$x=7,\ \dfrac{15}{4}$

i) $x=7$ のとき

左辺 $=14$, 右辺 $=14$

ii) $x=\dfrac{15}{4}$ のとき

左辺 $=\dfrac{25}{2}$, 右辺 $=\dfrac{15}{2}$ 　不適

よって $x=7$

(6) $\sqrt{x-1}+2=\sqrt{2x+5}$

解答

両辺を 2 乗すると

$(x-1)+4\sqrt{x-1}+4=2x+5$

$4\sqrt{x-1}=x+2$

両辺を 2 乗すると

$16(x-1)=x^2+4x+4$

$x^2-12x+20=0$

$(x-2)(x-10)=0$

$x=2,\ 10$

i) $x=2$ のとき

左辺 $=3$, 右辺 $=3$

ii) $x=10$ のとき

左辺 $=5$, 右辺 $=5$

よって $x=2,\ 10$

5　絶対値記号を含む方程式

87　次の等式を満たす x の値を求めなさい．

(1)　$|x| = 3$

解答

$x = \pm 3$

(2)　$|x| = \dfrac{1}{5}$

解答

$x = \pm\dfrac{1}{5}$

(3)　$|x-2| = 1$

解答

$x - 2 = \pm 1$

$x = 2 \pm 1$

$x = 3,\ 1$

(4)　$|x+5| = 5$

解答

$x + 5 = \pm 5$

$x = -5 \pm 5$

$x = 0,\ -10$

(5)　$|x-1| = \dfrac{2}{3}$

解答

$x - 1 = \pm\dfrac{2}{3}$

$x = 1 \pm \dfrac{2}{3}$

$x = \dfrac{5}{3},\ \dfrac{1}{3}$

(6)　$|x+3| = \dfrac{2}{9}$

解答

$x + 3 = \pm\dfrac{9}{2}$

$x = -3 \pm \dfrac{9}{2}$

$x = \dfrac{3}{2},\ -\dfrac{15}{2}$

(7)　$|2x-1| = 4$

解答

$2x - 1 = \pm 4$

$2x = 1 \pm 4$

$x = \dfrac{1 \pm 4}{2}$

$x = \dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{2}$

(8)　$|4x+3| = 5$

解答

$4x + 3 = \pm 5$

$4x = -3 \pm 5$

$x = \dfrac{-3 \pm 5}{4}$

$x = -2,\ \dfrac{1}{2}$

(9)　$|5x+2| - 1 = 7$

解答

$|5x+2| = 8$

$5x + 2 = \pm 8$

$5x = -2 \pm 8$

$x = \dfrac{-2 \pm 8}{5}$

$x = \dfrac{6}{5},\ -2$

(10)　$|3x-10| - 5 = 0$

解答

$|3x-10| = 5$

$3x - 10 = \pm 5$

$3x = 10 \pm 5$

$x = \dfrac{10 \pm 5}{3}$

$x = 5,\ \dfrac{5}{3}$

(11)　$\left|\dfrac{x}{2} - 1\right| = 2$

解答

$\dfrac{x}{2} - 1 = \pm 2$

$x = 2 \pm 4$

$x = 6,\ -2$

(12)　$\left|\dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{6}\right| = \dfrac{1}{6}$

解答

$\dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{6} = \pm\dfrac{1}{6}$

$2x = -5 \pm 1$

$x = -2,\ -3$

§ 2　不等式

2.1　不等式の性質

88　次の数量関係を不等式で表しなさい．

(1)　ある数 x に 3 をたすと 8 以上になる．

解答

$x + 3 \geqq 8$

(2)　ある数 x の 2 倍から 5 をひくと，2 より小さくなる．

解答

$2x - 5 < 2$

(3)　2 つの数 a，b の和は c を超えない．

解答

$a + b \leqq c$

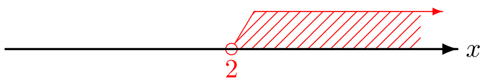
(4)　3 つの数 x，y，z の平均は 78 未満である．

解答

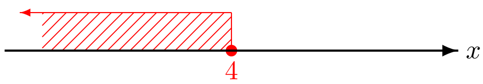
$\dfrac{x + y + z}{3} < 78$

89　次の不等式が表す x の範囲を数直線上に表しなさい．

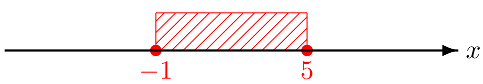
(1)　$x > 2$



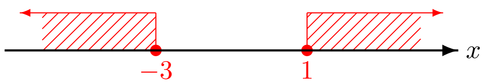
(2)　$x \leqq 4$



(3)　$-1 \leqq x \leqq 5$

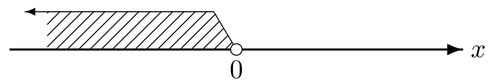


(4)　$x \leqq -3$，　$1 \leqq x$



90　次の図で表される x の範囲を，不等式で表しなさい．

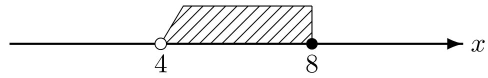
(1)



解答

$x < 0$

(2)



解答

$4 < x \leqq 8$

91　$a < b$ のとき，次の式の大小関係を不等式で表しなさい．

(1)　$a + 5$，　$b + 5$

解答

$a + 5 < b + 5$

(2)　$-\dfrac{3 - 2a}{2}$，　$-\dfrac{3 - 2b}{2}$

解答

$-\dfrac{3 - 2a}{2} < -\dfrac{3 - 2b}{2}$

92　$-2 \leqq x \leqq 3$ のとき，次の式の値の範囲を求めなさい．

(1)　$2x - 5$

解答

与えられた不等式の各辺を 2 倍して，

$-4 \leqq 2x \leqq 6$

各辺から 5 をひいて，

$-9 \leqq 2x - 5 \leqq 1$

(2)　$1 - 3x$

解答

与えられた不等式の各辺を -3 倍して，

$6 \geqq -3x \geqq -9$

各辺に 1 をたして，

$7 \geqq -3x + 1 \geqq -8$

よって，　$-8 \leqq 1 - 3x \leqq 7$

2.2　一次不等式

1　一次不等式の解法

93　次の不等式を解きなさい．

(1)　$x-5>3$

解答
$x>3+5$
$x>8$

(2)　$x+8 \geqq 2$

解答
$x \geqq 2-8$
$x \geqq -6$

(3)　$3x<-15$

解答
$\dfrac{3x}{3}<\dfrac{-15}{3}$
$x<-5$

(4)　$-5x \leqq -20$

解答
$\dfrac{-5x}{-5} \geqq \dfrac{-20}{-5}$
$x \geqq 4$

(5)　$\dfrac{x}{3}<2$

解答
$\dfrac{x}{3}\cdot 3<2\cdot 3$
$x<6$

(6)　$-\dfrac{x}{4} \geqq 1$

解答
$-\dfrac{x}{4}\cdot(-4) \leqq 1\cdot(-4)$
$x \leqq -4$

94　次の不等式を解きなさい．

(1)　$-x+1 \leqq 7$

解答
$-x \leqq 7-1$
$-x \leqq 6$
$x \geqq -6$

(2)　$8 \geqq 3x+5$

解答
$-3x \geqq 5-8$
$-3x \geqq -3$
$x \leqq 1$

(3)　$x-10<26-3x$

解答
$x+3x<26+10$
$4x<36$
$x<9$

(4)　$x-5(3-x)<2$

解答
$x-15+5x<2$
$6x<2+15$
$6x<17$
$x<\dfrac{17}{6}$

(5)　$2x-5 \geqq 3(2-x)+1$

解答
$2x-5 \geqq 6-3x+1$
$2x+3x \geqq 6+1+5$
$5x \geqq 12$
$x \geqq \dfrac{12}{5}$

(6)　$\dfrac{4x+3}{4}>\dfrac{2x-1}{3}-1$

解答
$(\times 12)$　$3(4x+3)>4(2x-1)-12$
$12x+9>8x-4-12$
$12x-8x>-4-12-9$
$4x>-25$
$x>-\dfrac{25}{4}$

(7)　$\dfrac{2x+3}{9}-\dfrac{x-6}{18}<1$

解答
$(\times 18)$　$2(2x+3)-(x-6)<18$
$4x+6-x+6<18$
$4x-x<18-6-6$
$3x<6$
$x<2$

(8)　$\dfrac{x+4}{3}-\dfrac{2x+3}{4}<1$

解答
$(\times 12)$　$4(x+4)-3(2x+3)<12$
$4x+16-6x-9<12$
$4x-6x<12-16+9$
$-2x<5$
$x>-\dfrac{5}{2}$

2　一次不等式の利用

95　1 個 100 円のりんごと 1 個 80 円の柿を合わせて 8 個買い，値段を 700 円以下にしたい．りんごは何個まで買えるか．

解答

りんごの個数を x 個とすると，

$$100x + 80(8 - x) \leqq 700$$

$(\div 10)$

$$10x + 8(8 - x) \leqq 70$$
$$10x + 64 - 8x \leqq 70$$
$$10x - 8x \leqq 70 - 64$$
$$2x \leqq 6$$
$$x \leqq 3$$

よって，3 個まで買える．

96　現在，兄は 4500 円，弟は 7600 円の貯金がある．来月から毎月兄は 700 円，弟は 400 円ずつ貯金すると，何か月後に兄の貯金額が，弟の貯金額をはじめてこえるか．

解答

x か月後にこえるとすると，

$$4500 + 700x > 7600 + 400x$$

$(\div 100)$

$$45 + 7x > 76 + 4x$$
$$7x - 4x > 76 - 45$$
$$3x > 31$$
$$x > \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$$

x は整数なので，11 か月後

97　ボールを投げて，的に当たれば ＋ 7 点，的を外れれば － 2 点の得点になるゲームがある．このゲームでボールを 50 回投げて，得点の合計が 100 点以上になるには，最低何回，的に当てればよいか．

解答

的に当てる回数を x 回とすると，

$$7x - 2(50 - x) \geqq 100$$
$$7x - 100 + 2x \geqq 100$$
$$9x \geqq 200$$
$$x \geqq \frac{200}{9} = 22\frac{2}{9}$$

x は整数なので，23 回

98　クラスの記念写真の値段は 30 枚まで 1 枚 25 円で，30 枚をこえると，1 枚につき 15 円で焼き増ししてくれる．1 枚平均 20 円以下にするには，何枚以上注文すればよいか．

解答

注文する枚数を x 枚とすると

$$30 \times 25 + 15(x - 30) \leqq 20x$$
$$750 + 15x - 450 \leqq 20x$$
$$15x - 20x \leqq -750 + 450$$
$$-5x \leqq -300$$
$$x \geqq 60$$

よって，60 枚以上注文すればよい．

99　ある博物館の入館料は，1 人 500 円であるが，40 人以上の団体の場合は 2 割引となる．40 人未満の団体が入館するのに，40 人の団体として料金を払ったほうが安くなるのは，団体の人数が何人の場合か．

解答

人数を x 人とする．ただし，$x < 40$

$$500x > 500 \times \frac{8}{10} \times 40$$
$$500x > 16000$$
$$x > 32$$

よって，33 人以上 39 人以下の場合．

100　4 ％ の食塩水が 200g ある．これに 9 ％の食塩水を加えて 7 ％以上の食塩水をつくりたい．9 ％の食塩水は，少なくとも何 g 必要か．

解答

9 ％の食塩水を xg 加えるとすると

$$200 \times \frac{4}{100} + x \times \frac{9}{100} \geqq (200 + x) \times \frac{7}{100}$$

$(\times 100)$

$$800 + 9x \geqq 7(200 + x)$$
$$800 + 9x \geqq 1400 + 7x$$
$$9x - 7x \geqq -750 + 450$$
$$2x \geqq 600$$
$$x \geqq 300$$

よって，300g 以上必要．

2.3　二次不等式

1　二次不等式

101　次の不等式を解きなさい．

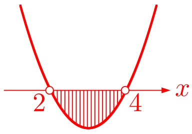
(1)　$x^2 - 6x + 8 < 0$

解答

$(x-2)(x-4) < 0$

よって，

$2 < x < 4$



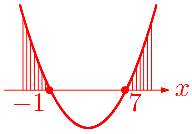
(2)　$x^2 - 6x - 7 \geqq 0$

解答

$(x+1)(x-7) \geqq 0$

よって，

$x \leqq -1,\ 7 \leqq x$



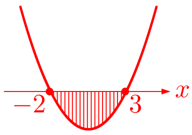
(3)　$x^2 - x - 6 \leqq 0$

解答

$(x+2)(x-3) \leqq 0$

よって，

$-2 \leqq x \leqq 3$



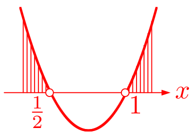
(4)　$2x^2 - 3x + 1 > 0$

解答

$(2x-1)(x-1) > 0$

よって，

$x < \dfrac{1}{2},\ 1 < x$



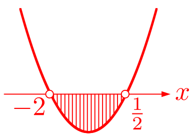
(5)　$2x^2 + 3x - 2 < 0$

解答

$(x+2)(2x-1) < 0$

よって，

$-2 < x < \dfrac{1}{2}$



(6)　$px^2 - (p+1)x + 1 \geqq 0 \quad (p > 1)$

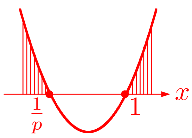
解答

$(px-1)(x-1) \geqq 0$

$p > 1$ より，$\dfrac{1}{p} < 1$

よって，

$x \leqq \dfrac{1}{p},\quad 1 \leqq x$



102　次の不等式を解きなさい．

(1)　$3x^2 - 2 \leqq 0$

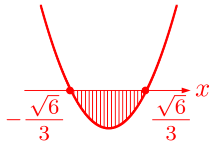
解答

$3x^2 - 2 = 0$ を解くと

$x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

よって，

$-\dfrac{\sqrt{6}}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{3}$



(2)　$x^2 - 2x - 1 < 0$

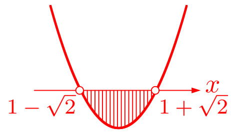
解答

$x^2 - 2x - 1 = 0$ を解くと

$x = 1 \pm \sqrt{2}$

よって，

$1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$



(3)　$x^2 + 4x + 1 \geqq 0$

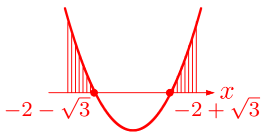
解答

$x^2 + 4x + 1 = 0$ を解くと

$x = -2 \pm \sqrt{3}$

よって，

$x \leqq -2 - \sqrt{3},\quad -2 + \sqrt{3} \leqq x$



(4)　$2x^2 - 6x + 1 > 0$

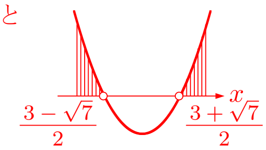
解答

$2x^2 - 6x + 1 = 0$ を解くと

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$

よって，

$x < \dfrac{3-\sqrt{7}}{2},\quad \dfrac{3+\sqrt{7}}{2} < x$



103　次の不等式を解きなさい．

(1)　$-x^2+4 \geqq 0$

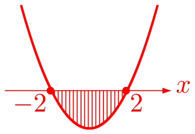
解答

$x^2-4 \leqq 0$

$(x+2)(x-2) \leqq 0$

よって，

$-2 \leqq x \leqq 2$



(2)　$5x < 2x^2-3$

解答

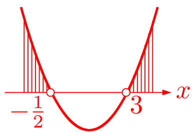
$-2x^2+5x+3<0$

$2x^2-5x-3>0$

$(2x+1)(x-3)>0$

よって，

$x<-\dfrac{1}{2}$，$3<x$



(3)　$2x^2-1<(x+1)^2$

解答

$2x^2-1<x^2+2x+1$

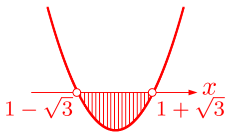
$x^2-2x-2<0$

$x^2-2x-2=0$ を解くと

$x=1\pm\sqrt{3}$

よって，

$1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$



(4)　$3x^2-5>x^2+7$

解答

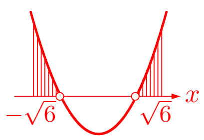
$2x^2-12>0$

$x^2-6>0$

$(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})>0$

よって，

$x<-\sqrt{6}$，$\sqrt{6}<x$



2　二次不等式の利用

104　次の問いに答えなさい．

(1)　二次方程式 $x^2-2kx-4k=0$ が異なる２つの虚数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めなさい．

解答

判別式を $\dfrac{D}{4}$ とすると

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot(-4k)=k^2+4k$

与えられた方程式が異なる２つの虚数解をもつためには，$\dfrac{D}{4}<0$ となればよいので，

$k^2+4k<0$

$k(k+4)<0$

よって，$-4<k<0$

(2)　二次方程式 $2x^2+2mx+1=0$ が異なる２つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めなさい．

解答

判別式を $\dfrac{D}{4}$ とすると

$\dfrac{D}{4}=m^2-2\cdot1=m^2-2$

与えられた方程式が異なる２つの実数解をもつためには，$\dfrac{D}{4}>0$ となればよいので，

$m^2-2>0$

$(m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})>0$

よって，$m<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<m$

105　二次関数 $y=x^2+2mx-m+2$ のグラフが，x 軸と共有点をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めなさい．

解答

$y=x^2+2mx-m+2$ のグラフが，x 軸と共有点をもたないのは，二次方程式 $x^2+2mx-m+2=0$ が，実数解をもたないとき，すなわち，$\dfrac{D}{4}<0$ のときである．

$m^2-1\cdot(-m+2)<0$

$m^2+m-2<0$

$(m+2)(m-1)<0$

よって，$-2<m<1$

2.4 高次不等式

106 次の不等式を解きなさい.

(1)　$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)<0$

解答

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ とおく.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

表より $1<x<2,\ \ 3<x<4$

(2)　$x^3-2x^2-x+2\geqq 0$

解答

$P(x)=x^3-2x^2-x+2$ とおく.

$P(1)=0$ より

$$P(x)=(x-1)(x^2-x-2)$$
$$=(x-1)(x+1)(x-2)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

表より $-1\leqq x\leqq 1,\ \ 2\leqq x$

(3)　$2x^3-3x^2-3x+2\geqq 0$

解答

$P(x)=2x^3-3x^2-3x+2$ とおく.

$P(-1)=0$ より

$$P(x)=(x+1)(2x^2-5x+2)$$
$$=(x+1)(x-2)(2x-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

表より $-1\leqq x\leqq \dfrac{1}{2},\ \ 2\leqq x$

(4)　$2x^3+3x^2-9x-10<0$

解答

$P(x)=2x^3+3x^2-9x-10$ とおく.

$P(-1)=0$ より

$$P(x)=(x+1)(2x^2+x-10)$$
$$=(x+1)(x-2)(2x+5)$$

x	$\cdots$	$-\frac{5}{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$2x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

表より $x<-\dfrac{5}{2},\ \ -1<x<2$

2.5　連立不等式

107　次の連立不等式を解きなさい．

(1) $\begin{cases} x-3>1 & \cdots ① \\ x+8>2(x+1) & \cdots ② \end{cases}$

解答

①を解くと

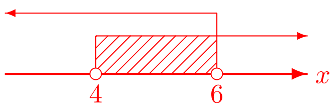
$x>4$

②を解くと

$x+8>2x+2$

$-x>-6$

$x<6$



よって，$4<x<6$

(2) $\begin{cases} 3x-8<4 & \cdots ① \\ x-2 \leqq 3x+4 & \cdots ② \end{cases}$

解答

①を解くと

$3x<4+8$

$3x<12$

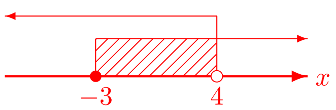
$x<4$

②を解くと

$x-3x \leqq 4+2$

$-2x \leqq 6$

$x \geqq -3$



よって，$-3 \leqq x<4$

(3) $\begin{cases} 6x-1>2x+4 & \cdots ① \\ 3x+5 \leqq 6x-4 & \cdots ② \end{cases}$

解答

①を解くと

$6x-2x>4+1$

$4x>5$

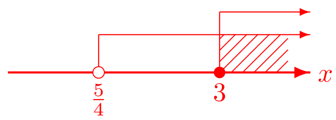
$x>\dfrac{5}{4}$

②を解くと

$3x-6x \leqq -4-5$

$-3x \leqq -9$

$x \geqq 3$



よって，$x \geqq 3$

(4) $\begin{cases} 2x+7>5x-2 & \cdots ① \\ 3x+1>4x & \cdots ② \end{cases}$

解答

①を解くと

$2x-5x>-2-7$

$-3x>-9$

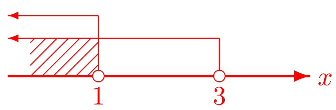
$x<3$

②を解くと

$3x-4x>-1$

$-x>-1$

$x<1$



よって，$x<1$

(5) $\begin{cases} x-1 \leqq 2(x-1) & \cdots ① \\ 6-7x \geqq 4(x-4) & \cdots ② \end{cases}$

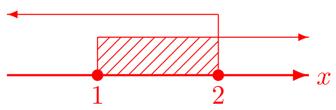
解答

①を解くと

$$x-1 \leqq 2x-2$$
$$x-2x \leqq -2+1$$
$$-x \leqq -1$$
$$x \geqq 1$$

②を解くと

$$6-7x \geqq 4x-16$$
$$-7x-4x \geqq -16-6$$
$$-11x \geqq -22$$
$$x \leqq 2$$



よって，$1 \leqq x \leqq 2$

(6) $\begin{cases} 5(x-1) \leqq -(2x+10) & \cdots ① \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} \geqq -\dfrac{x-4}{7} & \cdots ② \end{cases}$

解答

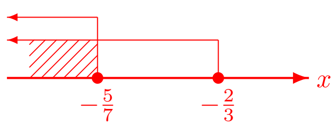
①を解くと

$$5x-5 \leqq -2x-10$$
$$5x+2x \leqq -10+5$$
$$7x \leqq -5$$
$$x \leqq -\frac{5}{7}$$

②を解くと

両辺を 28 倍して

$$14-7x \geqq -4(x-4)$$
$$14-7x \geqq -4x+16$$
$$-7x+4x \geqq 16-14$$
$$-3x \geqq 2$$
$$x \leqq -\frac{2}{3}$$



よって，$x \leqq -\dfrac{5}{7}$

108　次の連立不等式を解きなさい．

(1) $\begin{cases} 4(x-1) > 3(x-2) & \cdots ① \\ x^2-1 > 0 & \cdots ② \end{cases}$

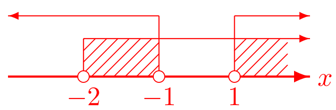
解答

①を解くと

$$4x-4 > 3x-6$$
$$4x-3x > -6+4$$
$$x > -2$$

②を解くと

$$(x+1)(x-1) > 0$$
$$x < -1,\quad 1 < x$$



よって，$-2 < x < -1,\quad 1 < x$

(2) $\begin{cases} x^2-9x+8 \leqq 0 & \cdots ① \\ \dfrac{1}{2}x+3 < x & \cdots ② \end{cases}$

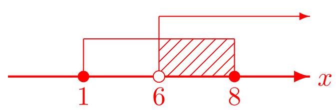
解答

①を解くと

$$(x-8)(x-1) \leqq 0$$
$$1 \leqq x \leqq 8$$

②を解くと

$$x+6 < 2x$$
$$x-2x < -6$$
$$x > 6$$



よって，$6 < x \leqq 8$

§３　式の証明

3.1　恒等式

109　次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めなさい．

(1)　$a(x+2)-b(x-2)=4x$

解答

左辺を x について整理すると，

$$ax+2a-bx+2b=4x$$
$$(a-b)x+2a+2b=4x$$

これが x についての恒等式になるためには，

$$\begin{cases} a-b=4 \\ 2a+2b=0 \end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$b=-2$

(2)　$3x^2+2x+5=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$

解答

右辺を x について整理すると，

$$3x^2+2x+5=a+bx-b+c(x^2-3x+2)$$
$$3x^2+2x+5=cx^2+(b-3c)x+(a-b+2c)$$

これが x についての恒等式になるためには，

$$\begin{cases} c=3 \\ b-3c=2 \\ a-b+2c=5 \end{cases}$$

これを解いて，$a=10$，$b=11$，$c=3$

(3)　$x^3+x^2+ax+b=(x-1)^2(x+c)$

解答

右辺を x について整理すると，

$$x^3+x^2+ax+b=(x^2-2x+1)(x+c)$$
$$x^3+x^2+ax+b=x^3+(c-2)x^2+(-2c+1)x+c$$

これが x についての恒等式になるためには，

$$\begin{cases} c-2=1 \\ -2c+1=a \\ c=b \end{cases}$$

これを解いて，$a=-5$，$b=3$，$c=3$

(4)　$2x^2-7x-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

解答

右辺を x について整理すると，

$$2x^2-7x-1=a(x^2-2x+1)+bx-b+c$$
$$2x^2-7x-1=ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c)$$

これが x についての恒等式になるためには，

$$\begin{cases} a=2 \\ -2a+b=-7 \\ a-b+c=-1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$b=-3$，$c=-6$

〔別解〕

$x-1=X$ とおくと，$x=X+1$ となるので

$$2(X+1)^2-7(X+1)-1=aX^2+bX+c$$

左辺を X について整理すると，

$$2(X^2+2X+1)-7(X+1)-1=aX^2+bX+c$$
$$2X^2-3X-6=aX^2+bX+c$$

両辺の係数を比較して，$a=2$，$b=-3$，$c=-6$

(5)　x^3-2x^2-3x+5
$=(x+1)^3+a(x+1)^2+b(x+1)+c$

解答

右辺を x について整理すると，

$$x^3-2x^2-3x+5$$
$$=(x^3+3x^2+3x+1)+a(x^2+2x+1)+bx+b+c$$
$$x^3-2x^2-3x+5$$
$$=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+3)x+(a+b+c+1)$$

これが x についての恒等式になるためには，

$$\begin{cases} a+3=-2 \\ 2a+b+3=-3 \\ a+b+c+1=5 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-5$，$b=4$，$c=5$

〔別解〕

$x+1=X$ とおくと，$x=X-1$ となるので

$$(X-1)^3-2(X-1)^2-3(X-1)+5$$
$$=X^3+aX^2+bX+c$$

左辺を X について整理すると，

$$X^3-5X^2+4X+5=X^3+aX^2+bX+c$$

両辺の係数を比較して，$a=-5$，$b=4$，$c=5$

110　次の等式が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を定めなさい．

(1)　$\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$

解答

右辺 $=\dfrac{a(x-2)}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{b(x-1)}{(x-2)(x-1)}$

$=\dfrac{ax-2a+bx-b}{(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{(a+b)x+(-2a-b)}{(x-1)(x-2)}$

左辺の分子の係数と比較して，

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a-b=1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-1$，　$b=1$

(2)　$\dfrac{1}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x-1}$

解答

右辺 $=\dfrac{a(x-1)}{(x-3)(x-1)}+\dfrac{b(x-3)}{(x-1)(x-3)}$

$=\dfrac{ax-a+bx-3b}{(x-3)(x-1)}$

$=\dfrac{(a+b)x+(-a-3b)}{(x-3)(x-1)}$

左辺の分子の係数と比較して，

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a-3b=1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=\dfrac{1}{2}$，　$b=-\dfrac{1}{2}$

(3)　$\dfrac{2x}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$

解答

右辺 $=\dfrac{a(x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)}+\dfrac{(bx+c)(x-1)}{(x^2+1)(x-1)}$

$=\dfrac{ax^2+a+bx^2-bx+cx-c}{(x-1)(x^2+1)}$

$=\dfrac{(a+b)x^2+(-b+c)x+(a-c)}{(x-1)(x^2+1)}$

左辺の分子の係数と比較して，

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -b+c=2 \\ a-c=0 \end{cases}$$

これを解いて，$a=1$，　$b=-1$，　$c=1$

(4)　$\dfrac{2x-1}{x(x^2-x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

解答

右辺 $=\dfrac{a(x^2-x+1)}{x(x^2-x+1)}+\dfrac{(bx+c)x}{(x^2-x+1)x}$

$=\dfrac{ax^2-ax+a+bx^2+cx}{x(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{(a+b)x^2+(-a+c)x+a}{x(x^2-x+1)}$

左辺の分子の係数と比較して，

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+c=2 \\ a=-1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-1$，　$b=1$，　$c=1$

(5)　$\dfrac{7x+1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

解答

右辺 $=\dfrac{a(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$+\dfrac{(bx+c)(x+1)}{(x^2-x+1)(x+1)}$

$=\dfrac{ax^2-ax+a+bx^2+bx+cx+c}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)}{x^3+1}$

左辺の分子の係数と比較して，

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=7 \\ a+c=1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-2$，　$b=2$，　$c=3$

Tea Break

6　次の□の中に，1～9 の数字を 1 つずつ入れて，正しい計算が成立するようにしなさい．（答えは 2 通りあります．）

$$\begin{array}{r} \square\square\square\square\square \\ -\quad \square\square\square\square \\ \hline 3\,3\,3\,3\,3 \end{array}$$

111　次の問いに答えなさい．

(1)　x^3-4x^2+3x+a が x^2+bx-1 で割り切れるとする．商を $x+c$ とおいて恒等式をつくり，定数 a，b，c の値を定めなさい．

解答

題意より

$$x^3-4x^2+3x+a=(x^2+bx-1)(x+c)$$

とおくことができる．右辺を x について整理すると，

$$x^3-4x^2+3x+a=x^3+(b+c)x^2+(bc-1)x-c$$

これが x についての恒等式になるためには，

$$\begin{cases} b+c=-4 \\ bc-1=3 \\ a=-c \end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$b=-2$，$c=-2$

(2)　x^3+px^2-5x+4 を x^2+qx-2 で割ると，余りが 2 になる．このとき，定数 p，q の値を求めなさい．

解答

題意より，商は 1 次式で，x の係数は 1 となるので，これを $x+c$ とすると，

$$x^3+px^2-5x+4=(x^2+qx-2)(x+c)+2$$

とおくことができる．右辺を x について整理すると，

$$x^3+px^2-5x+4$$
$$=x^3+(c+q)x^2+(cq-2)x-2c+2$$

これが x についての恒等式になるためには，

$$\begin{cases} p=c+q \\ cq-2=-5 \\ -2c+2=4 \end{cases}$$

これを解いて，$p=2$，$q=3$

(3)　$2x^3+ax+10$ を x^2-3x+b で割ると，余りが $3x-2$ になる．このとき，定数 a，b の値を定めなさい．

解答

題意より，商は 1 次式で，x の係数は 2 となるので，これを $2x+c$ とすると，

$$2x^3+ax+10=(x^2-3x+b)(2x+c)+3x-2$$

とおくことができる．右辺を x について整理すると，

$$2x^3+ax+10$$
$$=2x^3+(c-6)x^2+(2b-3c+3)x+bc-2$$

これが x についての恒等式になるためには，

$$\begin{cases} c-6=0 \\ 2b-3c+3=a \\ bc-2=10 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-11$，$b=2$

112　x^2+1 で割ると余りが $3x+2$ であり，x^2+x+1 で割ると余りが $2x+3$ である 3 次式を求めなさい．

解答

求める 3 次式を $P(x)$ とおく．

$P(x)$ を x^2+1 で割ったときの商は 1 次式なので，これを $ax+b$ とおくと，

$$P(x)=(x^2+1)(ax+b)+3x+2$$

と表せる．また，$P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの商も 1 次式で，x の係数は a となるので，これを $ax+c$ とおくと，

$$P(x)=(x^2+x+1)(ax+c)+2x+3$$

よって，

$$(x^2+1)(ax+b)+3x+2$$
$$=(x^2+x+1)(ax+c)+2x+3$$

は，x についての恒等式になる．

両辺を x について整理すると，

$$ax^3+bx^2+(a+3)x+b+2$$
$$=ax^3+(a+c)x^2+(a+c+2)x+c+3$$

これが x についての恒等式になるためには，

$$\begin{cases} b=a+c \\ a+3=a+c+2 \\ b+2=c+3 \end{cases}$$

これを解いて，$a=1$，$b=2$，$c=1$

よって，

$$\begin{aligned} P(x)&=1\cdot x^3+2x^2+(1+3)x+2+2 \\ &=x^3+2x^2+4x+4 \end{aligned}$$

3.2 等式の証明

1 恒等式の証明

113 次の等式を証明しなさい.

(1) $x^4+4y^4=\{(x+y)^2+y^2\}\{(x-y)^2+y^2\}$

証明

$$\begin{aligned}右辺&=(x+y)^2(x-y)^2+y^2(x+y)^2\\&\qquad+y^2(x-y)^2+y^4\\&=\{(x+y)(x-y)\}^2\\&\qquad+y^2\{(x+y)^2+(x-y)^2\}+y^4\\&=(x^2-y^2)^2+y^2(2x^2+2y^2)+y^4\\&=x^4-2x^2y^2+y^4+2x^2y^2+2y^4+y^4\\&=x^4+4y^4=左辺\end{aligned}$$

(2) $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$

証明

$$左辺=a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2$$

$$\begin{aligned}右辺&=a^2c^2+2abcd+b^2d^2\\&\qquad-(a^2d^2+2abcd+b^2c^2)\\&=a^2c^2+b^2d^2-a^2d^2-b^2c^2\end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺

(3) $(x^2+1)^3-(3x^4+1)=(x^2-1)^3+(3x^4+1)$

証明

$$\begin{aligned}左辺&=x^6+3x^4+3x^2+1-3x^4-1\\&=x^6+3x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}右辺&=x^6-3x^4+3x^2-1+3x^4+1\\&=x^6+3x^2\end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺

2 条件付き等式の証明

114 $x+y=1$ のとき，$x^2-x=y^2-y$ を証明しなさい.

証明

$x+y=1$ より，$x=1-y$ なので

$$\begin{aligned}左辺&=(1-y)^2-(1-y)\\&=1-2y+y^2-1+y\\&=y^2-y=右辺\end{aligned}$$

115 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明しなさい.

(1) $a^3+b^3+c^3=3abc$

証明

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ なので

$$\begin{aligned}左辺&=a^3+b^3+\{-(a+b)\}^3\\&=a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\\&=-3a^2b-3ab^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}右辺&=3ab\{-(a+b)\}\\&=-3a^2b-3ab^2\end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺

(2) $2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

証明

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ なので

$$\begin{aligned}左辺&=2a^2+b\{-(a+b)\}\\&=2a^2-ab-b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}右辺&=(b-a)\{-(a+b)-a\}\\&=(b-a)(-2a-b)\\&=-2ab-b^2+2a^2+ab\\&=2a^2-ab-b^2\end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺

(3)　$a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)=0$

証明

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ なので

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=a^2+b^2+\{-(a+b)\}^2\\&\quad+2\{-b(a+b)-(a+b)a+ab\}\\&=a^2+b^2+(a^2+2ab+b^2)\\&\quad+2(-ab-b^2-a^2-ab+ab)\\&=2a^2+2ab+2b^2+2(-a^2-ab-b^2)\\&=0=\text{右辺}\end{aligned}$$

(4)　$\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}=3$

証明

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ なので

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\frac{a^2}{-b(a+b)}+\frac{b^2}{-(a+b)a}\\&\quad+\frac{\{-(a+b)\}^2}{ab}\\&=\frac{-a^3-b^3+(a+b)^3}{ab(a+b)}\\&=\frac{-a^3-b^3+(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)}{ab(a+b)}\\&=\frac{3a^2b+3ab^2}{ab(a+b)}\\&=\frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)}\\&=3=\text{右辺}\end{aligned}$$

116　$abc=1$ のとき，次の等式を証明しなさい．

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$$

証明

$abc=1$ より，$c=\dfrac{1}{ab}$ なので

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{\frac{b}{ab}+b+1}\\&\quad+\frac{\frac{1}{ab}}{\frac{a}{ab}+\frac{1}{ab}+1}\\&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}\\&=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}\\&=1=\text{右辺}\end{aligned}$$

117　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明しなさい．

(1)　$\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$

証明

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，　$c=dk$

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\frac{2\cdot bk+3\cdot dk}{2b+3d}\\&=\frac{k(2b+3d)}{2b+3d}=k\\\text{右辺}&=\frac{2\cdot bk-3\cdot dk}{2b-3d}\\&=\frac{k(2b-3d)}{2b-3d}=k\end{aligned}$$

よって，左辺 $=$ 右辺

(2)　$\dfrac{2a+3b}{b}=\dfrac{2c+3d}{d}$

証明

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，　$c=dk$

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\frac{2\cdot bk+3b}{b}\\&=\frac{b(2k+3)}{b}=2k+3\\\text{右辺}&=\frac{2\cdot dk+3d}{d}\\&=\frac{d(2k+3))}{d}=2k+3\end{aligned}$$

よって，左辺 $=$ 右辺

(3)　$\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{c-d}{c+d}$

証明

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，　$c=dk$

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\frac{bk-b}{bk+b}\\&=\frac{b(k-1)}{b(k+1)}=\frac{k-1}{k+1}\\\text{右辺}&=\frac{dk-d}{dk+d}\\&=\frac{d(k-1))}{d(k+1)}=\frac{k-1}{k+1}\end{aligned}$$

よって，左辺 $=$ 右辺

118　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき，次の等式を証明しなさい．

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$

証明

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと

$x=ak,\ y=bk,\ z=ck$

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=(a^2+b^2+c^2)\left\{(ak)^2+(bk)^2+(ck^2)\right\}\\&=(a^2+b^2+c^2)(a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2)\\&=k^2(a^2+b^2+c^2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=(a\cdot ak+b\cdot bk+c\cdot ck)^2\\&=(a^2k+b^2k+c^2k)^2\\&=\left\{k(a^2+b^2+c^2)\right\}^2\\&=k^2(a^2+b^2+c^2)^2\end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺

(2)　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

証明

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと

$x=ak,\ y=bk,\ z=ck$

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\frac{(ak)^2+(bk)^2+(ck)^2}{a^2+b^2+c^2}\\&=\frac{k^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}\\&=k^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\frac{ak\cdot bk+bk\cdot ck+ck\cdot ak}{ab+bc+ca}\\&=\frac{k^2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}\\&=k^2\end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺

119　次の問いに答えなさい．

(1)　$3x=2y\fallingdotseq 0$ のとき，$\dfrac{3x+y}{x+2y}$ の値を求めなさい．

解答

$3x=2y$ より，$y=\dfrac{3}{2}x$　これを与式に代入して

$$\text{与式}=\frac{3x+\frac{3}{2}x}{x+2\cdot\frac{3}{2}x}=\frac{\frac{9}{2}x}{4x}=\frac{9x}{8x}=\frac{9}{8}$$

(2)　$3x=-4y=6z\fallingdotseq 0$ のとき，$\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ の値を求めなさい．

解答

$3x=-4y$ より $y=-\dfrac{3}{4}x$，　$3x=6z$ より

$z=\dfrac{1}{2}x$　これらを与式に代入して

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\frac{x\cdot\left(-\frac{3}{4}x\right)+\left(-\frac{3}{4}x\right)\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x\cdot x}{x^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2}\\&=\frac{-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{2}x^2}{x^2+\frac{9}{16}x^2+\frac{1}{4}x^2}\\&=\frac{-\frac{5}{8}x^2}{\frac{29}{16}x^2}=-\frac{10}{29}\end{aligned}$$

(3)　$\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}$ のとき，この式の値を求めなさい．

解答

$\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=k$ とおくと，

$x+y=kz$

$y+z=kx$

$z+x=ky$

辺々を加えると，

$2x+2y+2z=kx+ky+kz$

$2(x+y+z)-k(x+y+z)=0$

$(2-k)(x+y+z)=0$

よって，$2-k=0$, または，$x+y+z=0$

$2-k=0$ より，$k=2$

$x+y+z=0$ のとき，$z=-(x+y)$ を与式に代入して，

$\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{x+y}{-(x+y)}=-1$

よって，与式の値は，2，　-1

3.3 不等式の証明

1 絶対不等式の証明

120 次の不等式を証明しなさい．また，等号を含むものについては，等号の成り立つ場合について調べなさい．

(1) $x^2+x+1 \geqq 3x$

証明

$$\begin{aligned} 左辺-右辺 &= x^2+x+1-3x \\ &= x^2-2x+1 \\ &= (x-1)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

よって，$x^2+x+1 \geqq 3x$

等号が成り立つのは，$x-1=0$ すなわち $x=1$ のとき

(2) $x^2-2x+2>0$

証明

$$\begin{aligned} 左辺 &= (x-1)^2-1+2 \\ &= (x-1)^2+1>0 \end{aligned}$$

よって，$x^2-2x+2>0$

(3) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

証明

$$\begin{aligned} 左辺-右辺 &= a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2 \\ &\qquad -(a^2x^2+2abxy+b^2y^2) \\ &= a^2y^2-2abxy+b^2x^2 \\ &= (ay-bx)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

よって，$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

等号が成り立つのは，$ay-bx=0$ すなわち $ay=bx$ のとき

(4) $2x^2+3y^2 \geqq 4xy$

証明

$$\begin{aligned} 左辺-右辺 &= 2x^2-4xy+3y^2 \\ &= 2(x^2-2xy)+3y^2 \\ &= 2\{(x-y)^2-y^2\}+3y^2 \\ &= 2(x-y)^2+y^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

よって，$2x^2+3y^2 \geqq 4xy$

等号が成り立つのは，$x-y=0$，$y=0$ すなわち $x=y=0$ のとき

(5) $a^2+b^2 \geqq ab$

証明

$$\begin{aligned} 左辺-右辺 &= a^2+b^2-ab \\ &= a^2-ab+b^2 \\ &= \left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{1}{4}b^2+b^2 \\ &= \left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

よって，$a^2+b^2 \geqq ab$

等号が成り立つのは，$a-\dfrac{b}{2}=0$，$b=0$ すなわち $a=b=0$ のとき

(6) $a^2-ab+b^2 \geqq a+b-1$

証明

$$\begin{aligned} 左辺-右辺 &= a^2-ab+b^2-a-a+1 \\ &= a^2-(b+1)a+(b^2-b+1) \\ &= \left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2 \\ &\qquad -\frac{(b+1)^2}{4}+(b^2-b+1) \\ &= \left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2 \\ &\qquad -\frac{(b+1)^2-4(b^2-b+1)}{4} \\ &= \left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3b^2-6b+3}{4} \\ &= \left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3(b-1)^2}{4} \geqq 0 \end{aligned}$$

よって，$a^2-ab+b^2 \geqq a+b-1$

等号が成り立つのは，$a-\dfrac{b+1}{2}=0$，$b-1=0$ すなわち $a=b=1$ のとき

(7) $a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$

証明

$$\begin{aligned} 左辺-右辺 &= a^2+b^2-2(a+b-1) \\ &= a^2-2a+1+b^2-2b+1 \\ &= (a-1)^2+(b-1)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

よって，$a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$

等号が成り立つのは，$a-1=0$，$b-1=0$ すなわち $a=b=1$ のとき

2　条件付き不等式の証明

121　a, b はともに正の数で，$a \geqq b$ のとき，$a^2 \geqq b^2$ が成り立つことを証明しなさい．また，等号の成り立つ場合を調べなさい．

証明

$$\text{左辺} - \text{右辺} = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

ここで，

$a > 0$, $b > 0$ より，$a + b > 0$

$a \geqq b$ より，$a - b \geqq 0$ なので

$(a+b)(a-b) \geqq 0$

よって，$a^2 \geqq b^2$

等号が成り立つのは，$a - b = 0$ すなわち $a = b$ のとき．

122　$a < b$, $x < y$ のとき，$ax + by > bx + ay$ であることを証明しなさい．

証明

$$\begin{aligned}\text{左辺} - \text{右辺} &= ax + by - bx - ay \\ &= a(x-y) + b(y-x) \\ &= a(x-y) - b(x-y) \\ &= (x-y)(a-b)\end{aligned}$$

ここで，

$a < b$ より，$a - b < 0$

$x < y$ より，$x - y < 0$ なので

$(x-y)(a-b) > 0$

よって，$ax + by > bx + ay$

123　$a > b$ のとき，$a^3 > b^3$ であることを証明しなさい．

証明

$$\begin{aligned}\text{左辺} - \text{右辺} &= a^3 - b^3 \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a-b)\left\{\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + b^2\right\} \\ &= (a-b)\left\{\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right\}\end{aligned}$$

ここで，

$a > b$ より，$a - b > 0$

$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} > 0$ なので

$(a-b)\left\{\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right\} > 0$

よって，$a^3 > b^3$

3　相加平均と相乗平均

124　$a > 0$, $b > 0$ のとき，次の不等式を証明しなさい．また，等号の成り立つ場合を調べなさい．

(1)　$ab + \dfrac{1}{ab} \geqq 2$

証明

$ab > 0$, $\dfrac{1}{ab} > 0$ なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$ab + \frac{1}{ab} \geqq 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}} = 2\sqrt{1} = 2$$

よって

$$ab + \frac{1}{ab} \geqq 2$$

等号が成り立つのは，$ab = \dfrac{1}{ab}$，すなわち，$ab = 1$ のとき．

(2)　$\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} \geqq 2$

証明

$\dfrac{b}{a} > 0$, $\dfrac{a}{b} > 0$ なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$$

よって

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geqq 2$$

等号が成り立つのは，$\dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{b}$，すなわち，$a = b$ のとき．

(3)　$\left(a + \dfrac{1}{b}\right)\left(b + \dfrac{1}{a}\right) \geqq 4$

証明

$a > 0$, $\dfrac{1}{b} > 0$ なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$a + \frac{1}{b} \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{b}} = 2\sqrt{\frac{a}{b}} \quad \cdots ①$$

同様に

$$b + \frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \cdots ②$$

① と ② の辺々をかけ合わせて

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \times 2\sqrt{\frac{b}{a}} = 4$$

よって

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geqq 4$$

等号が成り立つのは，$a = \dfrac{1}{b}$，$b = \dfrac{1}{a}$，すなわち，$ab = 1$ のとき．

(4)　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$

証明

$a>0$，$b>0$ なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab} \cdots ①$$

$\dfrac{1}{a}>0$，$\dfrac{1}{b}>0$ なので，同様に

$$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{ab}} \cdots ②$$

①と② の辺々をかけ合わせて

$$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 2\sqrt{ab}\times 2\sqrt{\dfrac{1}{ab}}=4$$

よって

$$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$$

等号が成り立つのは，$a=b$，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}$，すなわち，$a=b$ のとき．

125　a，b，c，d がすべて正の数であるとき，次の不等式を証明しなさい．また，等号の成り立つ場合を調べなさい．

(1)　$(a+b)(c+d) \geqq 4\sqrt{abcd}$

証明

a，b，c，d はすべて正の数なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab},\quad c+d \geqq 2\sqrt{cd}$$

辺々をかけ合わせて

$$(a+b)(c+d) \geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{cd}=4\sqrt{abcd}$$

よって

$$(a+b)(c+d) \geqq 4\sqrt{abcd}$$

等号が成り立つのは，$a=b$，$c=d$ のとき．

(2)　$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$

証明

a，b，c はすべて正の数なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab},\quad b+c \geqq 2\sqrt{bc},\quad c+a \geqq 2\sqrt{ca}$$

辺々をかけ合わせて

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &\geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}\\ &=8\sqrt{a^2b^2c^2}\\ &=8abc\end{aligned}$$

よって

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$$

等号が成り立つのは，$a=b=c$ のとき．

4　その他の不等式

126　次の不等式を証明しなさい．

(1)　$3\sqrt{a}+2\sqrt{b} > \sqrt{9a+4b}$

証明

$$\begin{aligned}(\text{左辺})^2-(\text{右辺})^2 &=(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2-(\sqrt{9a+4b})^2\\ &=9a+12\sqrt{ab}+4b-(9a+4b)\\ &=12\sqrt{ab}>0\end{aligned}$$

ここで，$3\sqrt{a}+2\sqrt{b}>0$，$\sqrt{9a+4b}>0$ なので，

$$3\sqrt{a}+2\sqrt{b} > \sqrt{9a+4b}$$

(2)　$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqq \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$

証明

$$\begin{aligned}(\text{左辺})^2-(\text{右辺})^2 &=\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\\ &=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{4}\\ &=\dfrac{2a+2b-a-2\sqrt{ab}-b}{4}\\ &=\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{4}\\ &=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4} \geqq 0\end{aligned}$$

ここで，$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}>0$，$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}>0$ なので，

$$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqq \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$$

(3)　次の不等式を証明しなさい．

$$|a-b| \leqq |a|+|b|$$

証明

$$\begin{aligned}(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2 &=(|a|+|b|)^2-|a-b|^2\\ &=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a^2-2ab+b^2)\\ &=a^2+2|a||b|+b^2-a^2+2ab-b^2\\ &=2(|a||b|+ab) \geqq 0\end{aligned}$$

ここで，$|a-b| \geqq 0$，$|a|+|b| \geqq 0$ なので，

$$|a-b| \leqq |a|+|b|$$

第３章　集合と命題

§ 1　集合

1.1　集合

1　集合と要素

127　次の集合を，要素を書き並べて表しなさい．

(1)　$\{x \mid x$ は 10 以下の素数 $\}$

解答

$\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

(2)　$\{x \mid -2 < x < 4,\ x$ は整数 $\}$

解答

$\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

(3)　$\{x \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$

解答

$\{-1,\ 4\}$

(4)　$\{x \mid x^2 = 3,\ x > 0\}$

解答

$\{\sqrt{3}\}$

(5)　$\{n(n-1) \mid n$ は 5 以下の自然数 $\}$

解答

$\{0,\ 2,\ 6,\ 12,\ 20\}$

(6)　$\{3n+1 \mid 0 \leqq n \leqq 5,\ n$ は整数 $\}$

解答

$\{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16\}$

2　集合の包含関係

128　次の集合 A，B について，包含関係があれば，$\subset$，$\supset$，$=$ を用いて表しなさい．

(1)　$A = \{x \mid -3 < x < 2\}$
　　$B = \{x \mid -2 < x < 2\}$

解答

$A \supset B$

(2)　$A = \{3n-1 \mid 1 \leqq n \leqq 5,\ n$ は整数 $\}$
　　$B = \{6n+2 \mid 0 \leqq n \leqq 2,\ n$ は整数 $\}$

解答

$A = \{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14\}$

$B = \{2,\ 8,\ 14\}$

$A \supset B$

129　次の集合の部分集合をすべて求めなさい．

(1)　$\{1,\ 2\}$

解答

ϕ

$\{1\}$，$\{2\}$

$\{1,\ 2\}$

(2)　$\{a,\ b,\ c,\ d\}$

解答

ϕ

$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$

$\{a,\ b\}$，$\{a,\ c\}$，$\{a,\ d\}$

$\{b,\ c\}$，$\{b,\ d\}$

$\{c,\ d\}$

$\{a,\ b,\ c\}$，$\{a,\ b,\ d\}$

$\{a,\ c,\ d\}$，$\{b,\ c,\ d\}$

$\{a,\ b,\ c,\ d\}$

1.2　集合の演算

130　次の集合 A, B について，$A\cap B$, $A\cup B$ を求めなさい．

(1)　$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

解答

$A\cap B=\{1,\ 3\}$

$A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

(2)　$A=\{x\mid 0\leqq x\leqq 4,\ x$ は実数$\}$

$B=\{x\mid \sqrt{15}\leqq x\leqq 8,\ x$ は実数$\}$

解答

$A\cap B=\{x\mid \sqrt{15}\leqq x\leqq 4,\ x$ は実数$\}$

$A\cup B=\{x\mid 0\leqq x\leqq 8,\ x$ は実数$\}$

(3)　$A=\{x\mid -2\leqq x\leqq 2,\ x$ は実数$\}$

$B=\{x\mid -5\leqq x\leqq 3,\ x$ は実数$\}$

解答

$A\cap B=\{x\mid -2\leqq x\leqq 2,\ x$ は実数$\}$

$A\cup B=\{x\mid -5\leqq x\leqq 3,\ x$ は実数$\}$

(4)　$A=\{2n+1\mid 0\leqq n\leqq 6,\ n$ は整数$\}$

$B=\{3n+1\mid 0\leqq n\leqq 4,\ n$ は整数$\}$

解答

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13\}$

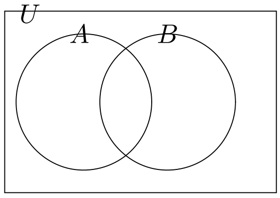
$B=\{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13\}$

よって，

$A\cap B=\{1,\ 7,\ 13\}$

$A\cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13\}$

131　$U=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$，$A=\{a,\ b,\ d\}$，$B=\{b,\ d,\ e\}$ のとき，次の集合を求めなさい．



(1)　$\overline{A}$

解答

与式 $=\{c,\ e\}$

(2)　$\overline{A}\cap B$

解答

与式 $=\{e\}$

(3)　$A\cup\overline{B}$

解答

与式 $=\{a,\ b,\ c,\ d\}$

(4)　$\overline{A}\cap\overline{B}$

解答

与式 $=\{c\}$

(5)　$\overline{A\cap B}$

解答

与式 $=\{a,\ c,\ e\}$

(6)　$\overline{A}\cup\overline{B}$

解答

与式 $=\{a,\ c,\ e\}$

132　$x^2<4x+12$ の解の集合を A, $x^2+5x\leqq 0$ の解の集合を B とするとき，$A\cap B$, $A\cup B$ を求めなさい．

解答

$x^2<4x+12$ を解くと，

$x^2-4x-12<0$

$(x+2)(x-6)<0$

$-2<x<6$

よって，$A=\{x\mid -2<x<6\}$ $\cdots$①

$x^2+5x\leqq 0$ を解くと，

$x(x+5)\leqq 0$

$-5\leqq x\leqq 0$

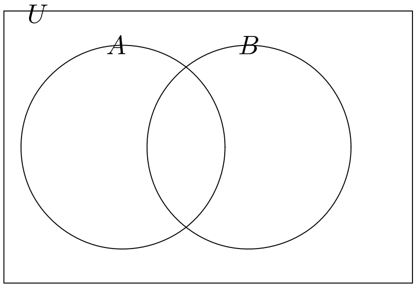
よって，$B=\{x\mid -5\leqq x\leqq 0\}$ $\cdots$②

①，②より，

$A\cap B=\{x\mid -2<x\leqq 0\}$

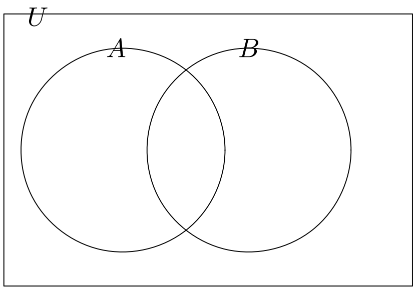
$A\cup B=\{x\mid -5\leqq x<6\}$

133　$U = \{n \mid 1 \leqq n \leqq 10,\ n$ は整数$\}$ を全体集合とする．U の部分集合 $A,\ B$ について，
$A \cap B = \{3,\ 6,\ 9\}$，$A \cup \overline{B} = \{1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9\}$，
$\overline{A} \cap \overline{B} = \{7\}$ であるとき，集合 $A,\ B$ を求めなさい．



解答
$A = \{1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9\}$
$B = \{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$

134　$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ を全体集合とする．U の部分集合 $A,\ B$ について，
$A \cap B = \{4,\ 8\}$，$A \cup B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$，$\overline{A} \cap B = \{9\}$ であるとき，次の問いに答えなさい．



(1)　A を求めなさい．

解答
$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

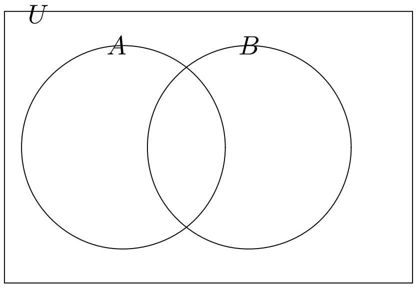
(2)　B を求めなさい．

解答
$B = \{4,\ 8,\ 9\}$

(3)　$\overline{A} \cup B$ を求めなさい．

解答
$\overline{A} \cup B = \{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$

135　$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ を全体集合とする．U の部分集合 $A,\ B$ について，
$A \cap B = \{2\}$，$\overline{A} \cap B = \{4,\ 6,\ 8\}$，$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1,\ 9\}$ であるとき，次の集合を求めなさい．



(1)　B

解答
与式 $= \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

(2)　$A \cup B$

解答
与式 $= \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

(3)　$A \cap \overline{B}$

解答
与式 $= \{3,\ 5,\ 7\}$

(4)　$\overline{A \cup B}$

解答
与式 $= \{1,\ 9\}$

Tea Break

7　ここに，A，B，C の 3 人のウソつきと正直者がいるが，正直者は一人だけである．次の会話から正直者は誰か見つけだしなさい．

A　「私は正直者です」
B　「A はウソつきです．私こそ正直者です」
C　「B こそウソつきです．ほんとうは私が正直者です」

§２　命題

2.1　命題と条件

1　命題の真偽

136　次の命題の真偽を答えなさい．

(1)　自然数 8 は素数である．

解答
偽

(2)　長方形は正方形である．

解答
偽

(3)　正三角形は二等辺三角形である．

解答
真

(4)　$3.14 > \pi$ である．

解答
偽

137　次の命題は偽である．反例をあげなさい．

(1)　実数 x について，$x^2 = 9$ ならば $x = 3$ である．

解答
$x = -3$

(2)　実数 a，b について，$a < 1$，$b < 1$ ならば $ab < 1$ である．

解答
$a = -2$，$b = -3$

(3)　自然数 n について，n が奇数ならば $10n + 1$ は素数である．

解答
$n = 5$
$(10n + 1 = 51 = 3 \times 17)$

138　次の命題の真偽を答えなさい．また，偽の場合には反例を示しなさい．ただし，文字はすべて実数とする．

(1)　$xy = 0$ ならば $x = 0$ である．

解答
偽　反例 $x = 2$，$y = 0$

(2)　$x = y$ ならば $x^2 - y^2 = 0$ である．

解答
真

(3)　$|x| = |y|$ ならば $x = y$ である．

解答
偽　反例 $x = -3$，$y = 3$

(4)　$x = 2$ ならば $x^2 + x - 6 = 0$ である．

解答
真

139　次の命題の真偽を答えなさい．また，偽の場合には反例を示しなさい．ただし，文字はすべて実数とする．

(1)　x と y が有理数ならば $x + y$ は有理数である．

解答
真

(2)　x と y が無理数ならば $x + y$ は無理数である．

解答
偽　反例　$x = \sqrt{2}$，$y = -\sqrt{2}$

(3)　xy が有理数ならば x，y はともに有理数である．

解答
偽　反例　$x = \sqrt{3}$，$y = \sqrt{3}$

140　次の命題の真偽を答えなさい．また，偽の場合には反例を示しなさい．ただし，文字はすべて実数とする．

(1)　$1 < x < 2$ ならば $1 < x < 3$ である．

解答

真

(2)　$x > 1$ ならば $x^2 > 1$ である．

解答

真

(3)　$x < 1$ ならば $x^2 < 1$ である．

解答

偽　反例 $x = -2$

(4)　$x > -1$ ならば $x^2 > 1$ である．

解答

偽　反例 $x = 0$

(5)　$|x| < 3$ ならば $x < 3$ である．

解答

真

(6)　$|x| \leqq 2$ ならば $|x-1| < 3$ である．

解答

偽　反例　$x = -2$

2　必要条件と十分条件

141　次の $\boxed{}$ の中に，必要，十分，必要十分のうち，最も適するものを入れなさい．いずれでもない場合には×をつけなさい．ただし，文字はすべて実数とする．

(1)　$ac = bc$ は，$a = b$ であるための $\boxed{}$ 条件である．

解答

$ac = bc \quad \substack{\xrightarrow{\times} \\ \xleftarrow{\bigcirc}} \quad a = b$

よって，必要

(2)　$x = y$ は，$x + z = y + z$ であるための $\boxed{}$ 条件である．

解答

$x = y \quad \substack{\xrightarrow{\bigcirc} \\ \xleftarrow{\bigcirc}} \quad x + z = y + z$

よって，必要十分

(3)　整数 n について，「n は 6 の倍数」は，「n は 3 の倍数」であるための $\boxed{}$ 条件である．

解答

n は 6 の倍数 $\quad \substack{\xrightarrow{\bigcirc} \\ \xleftarrow{\times}} \quad$ n は 3 の倍数

よって，十分

(4)　四角形がひし形であることは，対角線が直交するための $\boxed{}$ 条件である．

解答

ひし形である $\quad \substack{\xrightarrow{\bigcirc} \\ \xleftarrow{\times}} \quad$ 対角線が直交する

よって，十分

(5)　$x = 2$ は，$x^2 - 5x + 6 = 0$ であるための $\boxed{}$ 条件である．

解答

$x = 2 \quad \substack{\xrightarrow{\bigcirc} \\ \xleftarrow{\times}} \quad x^2 - 5x + 6 = 0$

よって，十分

(6)　$x \neq 0$ は，$(x-1)(x-2)=0$ であるための $\boxed{}$ 条件である．

解答

$x \neq 0 \quad \overset{\xrightarrow{\times}}{\xleftarrow{\bigcirc}} \quad (x-1)(x-2)=0$

よって，必要

(7)　$xy=1$ は，$x=1$ であるための $\boxed{}$ 条件である．

解答

$xy=1 \quad \overset{\xrightarrow{\times}}{\xleftarrow{\times}} \quad x=1$

よって，×

(8)　$x=y=2$ は，$2x-y=2y-2=2$ であるための $\boxed{}$ 条件である．

解答

$x=y=2 \quad \overset{\xrightarrow{\bigcirc}}{\xleftarrow{\bigcirc}} \quad 2x-y=2y-2=2$

よって，必要十分

(9)　$(x-y)(y-z)=0$ は，$x=y=z$ であるための $\boxed{}$ 条件である．

解答

$(x-y)(y-z)=0 \quad \overset{\xrightarrow{\times}}{\xleftarrow{\bigcirc}} \quad x=y=z$

よって，必要

(10)　$ab=0$，$a \neq 0$ は，$b=0$ であるための $\boxed{}$ 条件である．

解答

$ab=0,\ a \neq 0 \quad \overset{\xrightarrow{\bigcirc}}{\xleftarrow{\times}} \quad b=0$

よって，十分

(11)　$x=y=0$ は，$xy=0$，$x+y=0$ であるための $\boxed{}$ 条件である．

解答

$x=y=0 \quad \overset{\xrightarrow{\bigcirc}}{\xleftarrow{\bigcirc}} \quad xy=0,\ x+y=0$

よって，必要十分

3　条件の合成

142　次の条件の否定をつくりなさい．ただし，文字はすべて実数とする．

(1)　$x=\dfrac{1}{2}$

解答

$x \neq \dfrac{1}{2}$

(2)　$x>-3$

解答

$x \leqq -3$

(3)　x は有理数である．

解答

x は有理数ではない．$\longrightarrow$ x は無理数である．

(4)　$x<1$ または $x>5$

解答

$x \geqq 1$ かつ $x \leqq 5 \longrightarrow 1 \leqq x \leqq 5$

(5)　$-2 \leqq x < 3$

解答

$x<-2$ または $3 \leqq x$

(6)　$x>8$ または $x=3$

解答

$x \leqq 8$ かつ $x \neq 3$

(7)　n は偶数　または　10 以上

解答

n は奇数　かつ　10 より小さい（10 未満）

(8)　$x \geqq 5$ かつ $x \leqq 10$

解答

$x<5$ または $x>10$

2.2　逆・裏・対偶

143　次の命題の逆，裏，対偶を述べ，それらの真偽を答えなさい．ただし，x，y は実数，n は自然数とする．

(1)　n は 9 の倍数である．$\rightarrow$ n は 3 の倍数である．

解答

逆　n は 3 の倍数である．$\rightarrow$ n は 9 の倍数である．

偽（反例　$n=6$）

裏　n は 9 の倍数ではない．$\rightarrow$ n は 3 の倍数ではない．

偽（反例　$n=12$）

対偶　n は 3 の倍数ではない．$\rightarrow$ n は 9 の倍数ではない．

真

(2)　$x \fallingdotseq 2 \rightarrow x^2-3x+2 \fallingdotseq 0$

解答

逆　$x^2-3x+2 \fallingdotseq 0 \rightarrow x \fallingdotseq 2$

真

裏　$x=2 \rightarrow x^2-3x+2=0$

真

対偶　$x^2-3x+2=0 \rightarrow x=2$

偽（反例　$x=1$）

(3)　x，y がともに有理数ならば，$x+y$ は有理数である．

解答

逆　$x+y$ が有理数ならば，x，y はともに有理数である．

偽（反例　$x=\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{3}$）

裏　x が無理数，または y が無理数ならば，$x+y$ は無理数である．

偽

対偶　$x+y$ が無理数ならば，x が無理数，または y が無理数である．

真

144　次の命題が真であることを，対偶を用いて証明しなさい．

(1)　整数 n について，n^2 が奇数ならば，n は奇数である．

解答

この命題の対偶は，

「n が奇数でないならば，n^2 は奇数ではない．」

すなわち「n が偶数ならば，n^2 は偶数である．」

となる．

n が偶数ならば，自然数 m を用いて，$n=2m$ と表せる．よって，

$$n^2=(2m)^2=4m^2=2(2m^2)$$

したがって，n^2 は偶数である．

よって，もとの命題も真である．

(2)　$x+y>2$ ならば，$x>1$ または $y>1$ である．

解答

この命題の対偶は，

「$x \leqq 1$ かつ $y \leqq 1$ ならば，$x+y \leqq 2$ である．」

となる．

$x \leqq 1$，$y \leqq 1$ の辺々を加えると

$x+y \leqq 1+1$

すなわち，$x+y \leqq 2$ となる．

よって，もとの命題も真である．

(3)　m，n が整数のとき，mn が奇数ならば m も n も奇数である．

解答

この命題の対偶は，

「m，n の少なくとも一方が偶数ならば，mn は偶数である．」となる．

i)　m，n のうち，一方が偶数のとき

自然数 a，b を用いて，$m=2a$，$n=2b+1$ と表すと

$$mn=2a(2b+1)=2(2ab+a)$$

となり，mn は偶数となる．

ii)　m，n が偶数のとき

自然数 a，b を用いて，$m=2a$，$n=2b$ と表すと

$$mn=2a\cdot 2b=2(2ab)$$

となり，mn は偶数となる．

i)，ii) より，対偶が真であるので，もとの命題も真である．

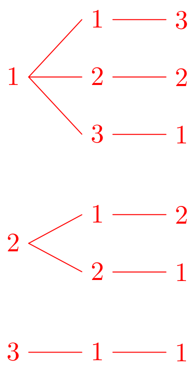
第４章　場合の数

§１　数え上げの基本

1.1　樹形図と辞書式配列

145　大中小の３個のさいころを投げるとき，目の和が５になる場合は何通りあるか.

解答



以上　６通り

146　４個の文字　aabc　から３個を取り出す．このとき，次のような場合をすべて求めなさい.

(1)　順序をつけて１列に並べる．(aab と baa は異なるもの)

解答

aab, aac, aba, abc, aca, acb
baa, bac, bca
caa, cab, cba

(2)　順序を問題にしないで組を作る．(aab, aba, baa は同じもの)

解答

aab, aac, abc

(3)　異なる文字だけを用いて，順序をつけて１列に並べる.

解答

abc, acb, bac, bca, cab, cba

(4)　異なる文字だけを用いて，組を作る.

解答

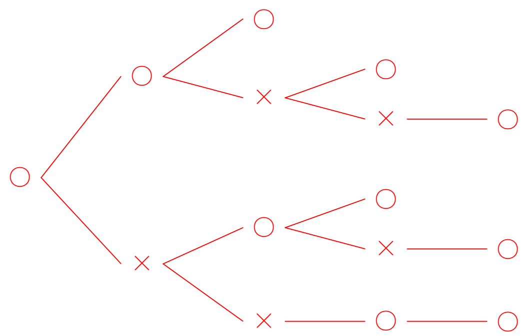
abc

147　次の問いに答えなさい.

(1)　ある競技の予選は５試合のうち３勝すれば通過できる．ただし，引き分けはなく，３勝したらそれ以降の試合はない．最初に１勝したとき，この競技の予選を通過するための勝敗の順は何通りあるか求めなさい.

解答

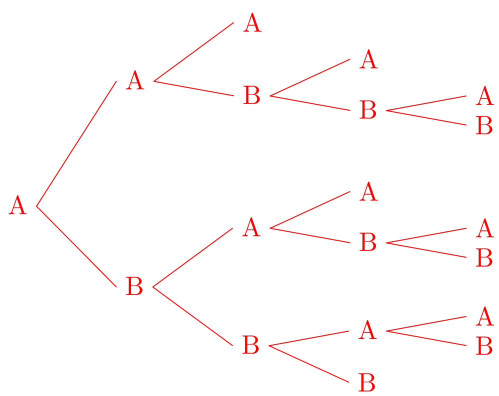
勝ちを○，負けを×で表すと，



以上　６通り

(2)　A, B ２つチームで，早く３勝したチームが優勝し，以後の試合を打ち切る優勝戦を行うとする．まず A が勝ったとき，優勝が決まるまでの勝負の分かれ方は何通りあるか．ただし，試合で引き分けはないものとする.

解答



以上　10 通り

1.2　和の法則

148　大小 2 つのさいころを投げるとき，次の場合は何通りあるか.

(1)　目の和が 5 または 6 になる場合

解答

目の出方を（大，小）で表す.

i)　目の和が 5 になる場合

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)　… 4 通り

ii)　目の和が 6 になる場合

(1, 5), (2, 4), (3, 3),

(4, 2), (5, 1)　… 5 通り

よって，和の法則より

$4+5=9$　…　9 通り

(2)　目の和が 10 以上になる場合

解答

目の和が 10 以上になるのは，10，11，12 の場合である.

i)　目の和が 10 になる場合

(4, 6), (5, 5), (6, 4)　… 3 通り

ii)　目の和が 11 になる場合

(5, 6), (6, 5)　… 2 通り

iii)　目の和が 12 になる場合

(6, 6)　… 1 通り

よって，和の法則より

$3+2+1=6$　…　6 通り

(3)　目の和が 3 の倍数になる場合

解答

目の和が 3 の倍数になるのは，3，6，9，12 の場合である.

i)　目の和が 3 になる場合

(1, 2), (2, 1)　… 2 通り

ii)　目の和が 6 になる場合　(1) より，5 通り

iii)　目の和が 9 になる場合

(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)　… 4 通り

iv)　目の和が 12 になる場合　(2) より，1 通り

よって，和の法則より

$2+5+4+1=12$　…　12 通り

149　大中小 3 つのさいころを投げるとき，次の場合は何通りあるか.

(1)　目の和が 8 の倍数になる場合

解答

目の出方を（大，中，小）で表す.

目の和が 8 の倍数になるのは，8，16 の場合である.

i)　目の和が 8 になる場合

(1, 1, 6), (1, 6, 1), (6, 1, 1)

(1, 2, 5), (1, 5, 2)

(2, 1, 5), (2, 5, 1)

(5, 1, 2), (5, 2, 1)

(1, 3, 4), (1, 4, 3)

(3, 1, 4), (3, 4, 1)

(4, 1, 3), (4, 3, 1)

(2, 2, 4), (2, 4, 2), (4, 2, 2)

(2, 3, 3), (3, 2, 3), (3, 3, 2)

以上　21 通り

ii)　目の和が 16 になる場合

(4, 6, 6), (6, 4, 6), (6, 6, 4)

(5, 5, 6), (5, 6, 5), (6, 5, 5)

以上　6 通り

よって，和の法則より

$21+6=27$　…　27 通り

(2)　大の目が中の目と小の目の和に等しくなる場合

解答

i)　大の目が 2 の場合

(2, 1, 1)　… 1 通り

ii)　大の目が 3 になる場合

(3, 1, 2), (3, 2, 1)　… 2 通り

iii)　大の目が 4 になる場合

(4, 1, 3), (4, 3, 1), (4, 2, 2)　… 3 通り

iv)　大の目が 5 になる場合

(5, 1, 4), (5, 4, 1)

(5, 2, 3), (5, 3, 2)　… 4 通り

v)　大の目が 6 になる場合

(6, 1, 5), (6, 5, 1)

(6, 2, 4), (6, 4, 2), (6, 3, 3)　… 5 通り

よって，和の法則より

$1+2+3+4+5=15$　…　15 通り

150　$x+y+z=8$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は何個あるか．

解答

$x+y+z=8$ より，$y+z=8-x$
ここで，$y \geqq 1$，$z \geqq 1$ より，$y+z \geqq 2$
よって，$8-x \geqq 2$，すなわち，$x \leqq 6$

i)　$x=1$ のとき
$y+z=7$ となるので，$(y,\ z)=(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ … 6 通り

ii)　$x=2$ のとき
$y+z=6$ となるので，$(y,\ z)=(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$ … 5 通り

iii)　$x=3$ のとき
$y+z=5$ となるので，$(y,\ z)=(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ … 4 通り

iv)　$x=4$ のとき
$y+z=4$ となるので，$(y,\ z)=(1,3),(2,2),(3,1)$ … 3 通り

v)　$x=5$ のとき
$y+z=3$ となるので，$(y,\ z)=(1,2),(2,1)$ … 2 通り

vi)　$x=6$ のとき
$y+z=2$ となるので，$(y,\ z)=(1,1)$ … 1 通り

よって，和の法則より
$6+5+4+3+2+1=21$ … 21 通り

151　$x+2y+3z=10$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は何個あるか．

解答

$x+2y+3z=10$ より，$x+2y=10-3z$
ここで，$x \geqq 1$，$y \geqq 1$ より，$x+2y \geqq 3$
よって，$10-3z \geqq 3$，すなわち，$z \leqq \dfrac{7}{3}$
したがって，$z=1,\ 2$

i)　$z=1$ のとき
$x+2y=7$ となるので，$(x,\ y)=(1,3),(3,2),(5,1)$ … 3 通り

ii)　$z=2$ のとき
$x+2y=4$ となるので，$(x,\ y)=(2,1)$ … 1 通り

よって，和の法則より
$3+1=4$ … 4 通り

152　10 円，50 円，100 円の 3 種類の硬貨をどれも 1 枚以上使って 350 円を支払うには，何通りの支払い方があるか．

解答

10 円，50 円，100 円の硬貨の枚数をそれぞれ x 枚，y 枚，z 枚 とすると，
$10x+50y+100z=350$
$x+5y+10z=35$
$x+5y+10z=35$ より，$x+5y=35-10z$
ここで，$x \geqq 1$，$y \geqq 1$ より，$x+5y \geqq 6$
よって，$35-10z \geqq 6$，すなわち，$z \leqq 2.9$
したがって，$z=1,\ 2$

i)　$z=1$ のとき
$x+5y=25$ となるので，$(x,\ y)=(20,1),(15,2),(10,3),(5,4)$ … 4 通り

i)　$z=2$ のとき
$x+5y=15$ となるので，$(x,\ y)=(10,1),(5,2)$ … 2 通り

よって，和の法則より
$4+2=6$ … 6 通り

1.3　積の法則

153　大小 2 つのさいころを投げるとき，次の問いに答えなさい.

(1)　2 個のさいころの目の出方は何通りあるか.

解答
大のさいころの目の出方は 6 通り.
小のさいころの目の出方は 6 通り.
よって，積の法則より
$6 \times 6 = 36$　…　36 通り

(2)　大きいさいころの目が 3 以上，小さいさいころの目が偶数である出方は何通りあるか.

解答
大のさいころの目の出方は，3，4，5，6 の 4 通り.
小のさいころの目の出方は，2，4，6 の 3 通り.
よって，積の法則より
$4 \times 3 = 12$　…　12 通り

154　A 市と B 町は異なる 4 つの道路で結ばれている. A 市から B 町まで行って帰るのに，次の場合，使用する道路の選び方は何通りあるか.

(1)　往復とも同じ道路を使用してよい場合

解答
行きに使う道路の選び方は 4 通り.
帰りに使う道路の選び方は 4 通り.
よって，積の法則より
$4 \times 4 = 16$　…　16 通り

(2)　往復で同じ道路を使用しない場合

解答
行きに使う道路の選び方は 4 通り.
帰りに使う道路の選び方は，行きに使った道路を除いた 3 通り.
よって，積の法則より
$4 \times 3 = 12$　…　12 通り

155　次の問いに答えなさい.

(1)　$(a+b)(x+y+z)$ を展開したときの項の数を求めなさい.

解答
$2 \times 3 = 6$　…　6 個

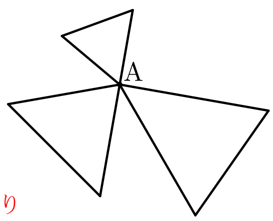
(2)　$(a+b)(p+q+r)(x+y+z+w)$ を展開したときの項の数を求めなさい.

解答
$2 \times 3 \times 4 = 24$　…　24 個

156　x，y は整数で，$1 \leqq x \leqq 3$，$3 \leqq y \leqq 6$ であるとき，$(x,\ y)$ を座標とする点はいくつあるか求めなさい.

解答
x 座標の選び方は，3 通り，y 座標の選び方は，4 通りあるので，積の法則より
$3 \times 4 = 12$　…　12 個

157　右の図を，A を出発点として一筆で書く方法は何通りあるか求めなさい.



解答
1 廻り目の選び方　…　6 通り
2 廻り目の選び方　…　4 通り
3 廻り目の選び方　…　2 通り
よって，積の法則より
$6 \times 4 \times 2 = 48$　…　48 通り

158　大中小３個のさいころを投げるとき，次のような場合は何通りあるか答えなさい.

(1)　すべての目の出方

解答

それぞれのさいころに，6 通りの目の出方があるので，積の法則より

$6 \times 6 \times 6 = 216$　216 通り

(2)　すべての目が奇数

解答

奇数の目は，1，3，5　…　3 通り

それぞれのさいころに，3 通りの目の出方があるので，積の法則より

$3 \times 3 \times 3 = 27$　27 通り

(3)　すべての目が異なる

解答

大のさいころの目　…　6 通り
中のさいころの目　…　5 通り
小のさいころの目　…　4 通り

よって，積の法則より

$6 \times 5 \times 4 = 120$　120 通り

(4)　少なくとも 2 個が同じ目

解答

「少なくとも 2 個が同じ目」となるのは，
i)　2 個が同じ目
ii)　3 個が同じ目
の場合がある．これは「すべての目が異なる」事象の余事象となるので，(1)，(3) より，

$216 - 120 = 96$　96 通り

(5)　目の積が奇数

解答

目の積が奇数となるのは，すべての目が奇数のときである．(偶数が 1 つでも入ると，積は偶数になってしまう)

$3 \times 3 \times 3 = 27$　27 通り

(6)　目の積が偶数

解答

(5) の余事象となるので，

$216 - 27 = 189$　189 通り

(7)　目の積が 3 の倍数

解答

目の積が 3 の倍数に**ならない**場合を考える.

3，6 のいずれの目も含まなければ，積は 3 の倍数とならないので，それぞれの目の出方は 4 通り．よって，積の法則より

$4 \times 4 \times 4 = 64$

$216 - 64 = 152$　152 通り

(8)　目の和が偶数

解答

目の和が偶数となるのは，3 個とも偶数か，2 個が奇数で 1 個が偶数の場合がある.

i)　3 個とも偶数のとき

$3 \times 3 \times 3 = 27$　27 通り

ii)　2 個が奇数で 1 個が偶数のとき

偶数の目が出るさいころの選び方は 3 通り

その各の選び方に対して，奇数の目の出方が 3 通り，偶数の目の出方が 3 通りずつあるので，

$3 \times (3 \times 3 \times 3) = 81$　81 通り

i)，ii) は同時にこらないので,」和の法則より，

$27 + 81 = 108$　108 通り

(9)　目の和が奇数

解答

(8) の余事象となるので，

$216 - 108 = 108$　108 通り

Tea Break

8　**「孤独の 7」**と呼ばれる覆面算

```
              □ 7□□□
□□□ ) □□□□□□□□
       □□□□
         □□□
         □□□
         □□□□
          □□□
           □□□□
           □□□□
              0
```

159　2 桁の自然数のうちで，次のような数は何個あるか，求めなさい．

(1)　十の位の数と一の位の数の和が偶数になるもの．

解答

和が偶数になるのは，2 数がともに偶数か，2 数がともに奇数のときである．

i)　2 数が偶数のとき

十の位の数　…　2，4，6，8　の 4 通り

一の位の数　…　0，2，4，6，8　の 5 通り

よって，積の法則より，$4 \times 5 = 20$…　20 個

ii)　2 数が奇数のとき

十の位の数　…　1，3，5，7，9　の 5 通り

一の位の数　…　1，3，5，7，9　の 5 通り

よって，積の法則より，$5 \times 5 = 25$…　25 個

i)，ii) は同時には起こらないので，和の法則より，

$20 + 25 = 45$　…　45 個

(2)　十の位の数と一の位の数の積が偶数になるもの．

解答

題意の余事象，すなわち「積が奇数になる」場合を考える．2 数の積が奇数になるのは，2 数がともに奇数のときである．

よって，$5 \times 5 = 25$　…　25 個

ここで，2 桁の自然数は 90 個あるので，

$90 - 25 = 65$　…　65 個

〔別解〕

積が偶数になるのは，2 数がともに偶数，十の位が偶数で一の位が奇数，十の位が奇数で一の位が偶数，のときである．

i)　2 数が偶数のとき

$4 \times 5 = 20$　…　20 個

ii)　十の位が偶数で一の位が奇数のとき

$4 \times 5 = 20$　…　20 個

iii)　十の位が奇数で一の位が偶数のとき

$5 \times 5 = 25$　…　25 個

i)，ii)，iii) は同時には起こらないので，和の法則より，

$20 + 20 + 25 = 65$　…　65 個

160　次の問いに答えなさい．

(1)　1200 の約数の個数を求めなさい．

解答

1200 を素因数分解すると，

$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$

よって，約数の個数は，

$(4+1) \times (1+1) \times (2+1)$

$= 5 \times 2 \times 3 = 30$　…　30 個

(2)　40 の約数の個数と，その約数の総和を求めなさい．

解答

40 を素因数分解すると，

$40 = 2^3 \times 5$

よって，約数の個数は，

$(3+1) \times (1+1) = 4 \times 2 = 8$　…　8 個

約数の総和は，

$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(5^0 + 5^1)$

$= 15 \times 6 = 90$

(3)　360 の約数の個数と，その約数の総和を求めなさい．

解答

360 を素因数分解すると，

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

よって，約数の個数は，

$(3+1) \times (2+1) \times (1+1)$

$= 4 \times 3 \times 2 = 24$　…　24 個

約数の総和は，

$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1)$

$= 15 \times 13 \times 6 = 1170$

§ 2　順列

2.1　順列

161　次の値を求めなさい.

(1)　${}_6\mathrm{P}_3$

解答

与式 $= 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

(2)　${}_5\mathrm{P}_1$

解答

与式 $= 5$

(3)　${}_7\mathrm{P}_4$

解答

与式 $= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

(4)　${}_6\mathrm{P}_6$

解答

与式 $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

162　次の値を求めなさい.

(1)　$4!$

解答

与式 $= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

(2)　$7!$

解答

与式 $= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

(3)　$\dfrac{9!}{7!}$

解答

$$\text{与式} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 8 = 72$$

(4)　$\dfrac{n!}{(n-1)!}$

解答

$$\text{与式} = \frac{n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = n$$

163　次の問いに答えなさい.

(1)　a, b, c, d, e の 5 個の文字から 3 個を選んで 1 列に並べるとき，何通りの並べ方があるか求めなさい.

解答

${}_5\mathrm{P}_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$　…　60 通り

(2)　1 から 6 までの 6 個の数字から 4 個をとって，1 列に並べるとき，何通りの並べ方があるか求めなさい.

解答

${}_6\mathrm{P}_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$　…　360 通り

164　5 人乗りの車に 5 人が乗車するとき，乗り方は何通りあるか，次の各場合について求めなさい.

(1)　5 人全員が運転できるとき

解答

${}_5\mathrm{P}_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$　…　120 通り

(2)　5 人のうち，3 人だけが運転できるとき

解答

運転する人の選び方は，3 通り

運転する人の選び方の各に対して，残りの 4 人の乗り方は，$4!$ 通り

よって，$3 \times 4! = 72$　…　72 通り

165　0 から 6 までの数字を用いて，7 桁の整数をつくる．次の問いに答えなさい．ただし，同じ数字は 2 回以上使わないこととする．

(1)　全部でいくつの整数ができるか．

解答

□□□□□□□
↑
最高位は 0 を除く 6 通り

以下の位は，残り 6 個の数字の順列となるので，$6!$ 通り

よって，$6 \times 6! = 4320$　…　4320 個

(2)　偶数はいくつできるか．

解答

一の位が 0 の場合と，それ以外の偶数の場合に分けて考える．

i)　一の位の数が 0 のとき

十の位から最高位までは，0 以外の 6 個の数が並ぶので，$6! = 720$　…　720 個

ii)　一の位の数が 2，4，6 のとき

一の位の数は，2，4，6 の 3 通り

最高位の数は 0 の除く 5 通り

それ以外の位は，残りの 5 個の数字が並ぶので，$5!$ 通り

よって，$3 \times 5 \times 5! = 1800$　…　1800 個

i)，ii) より，$720 + 1800 = 2520$　…　2520 個

166　5 個の文字 a，b，c，d，e を全部並べるとき，両端が母音のものはいくつできるか．

解答

母音 (a，e) を両端に並べる方法は，$2!$ 通り

残り 3 文字を，母音 2 文字の間に並べる方法は，$3!$ 通り

よって，$2! \times 3! = 12$　…　12 通り

167　女子 5 人，男子 3 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか求めなさい．

(1)　両端が男子である並び方

解答

両端の男子の並び方は，${}_3P_2$ 通り

両端を決めた後，残り 5 人の並び方は，$6!$ 通り

よって，${}_3P_2 \times 6! = 4320$　…　4320 通り

(2)　女子 5 人が皆隣り合う並び方

解答

女子 5 人を 1 組として，この 1 組と男子 3 人の並び方は，$4!$ 通り

各の並び方に対して，女子の並び方は，$5!$ 通り

よって，$4! \times 5! = 2880$　…　2880 通り

(3)　女子は女子，男子は男子で皆隣り合う並び方

解答

女子，男子をそれぞれ 1 組として，この 2 組の並び方は，$2!$ 通り

各の並び方に対して，女子の並び方は，$5!$ 通り，男子の並び方は，$3!$ 通り

よって，$2! \times 5! \times 3! = 1440$　…　1440 通り

(4)　どの男子も隣り合わない並び方

解答

まず女子だけを並べると，並び方は，$5!$ 通り

　○　○　○　○　○
↑　↑　↑　↑　↑　↑

次に，男子 3 人を女子の間か両端の外側（↑の場所）の 6 カ所のどこかに 1 人ずつ並べると，その並び方は，${}_6P_3$ 通り

よって，$5! \times {}_6P_3 = 14400$　…　14400 通り

168　A，B，C の 3 人が 1 号室から 7 号室の部屋に 1 人ずつ宿泊する．次の問いに答えなさい．

(1)　3 人が宿泊する方法は何通りあるか．

解答

${}_7P_3 = 210$　…　210 通り

(2)　3 人が連続する番号の部屋に宿泊する場合の数を求めなさい．

解答

連続する番号となるような部屋の選び方は，

1-2-3，2-3-4，3-4-5，4-5-6，5-6-7　の 5 通り

各の部屋の選び方に対して，3 人の部屋の選び方は，$3!$ 通り

よって，$5 \times 3! = 30$　…　30 通り

2.2 いろいろな順列

1 円順列

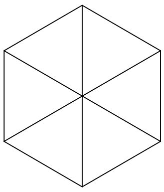
169　次の問いに答えなさい.

(1)　7 人が手をつないで輪を作る方法は何通りあるか.

解答

$(7-1)! = 6! = 720$ … 720 通り

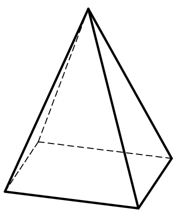
(2)　右の図のように，6 等分した正六角形の各部分を，異なる 6 色の絵の具をすべて使って塗り分ける方法は何通りあるか.



解答

$(6-1)! = 5! = 120$ … 120 通り

170　正四角錐の 5 面を，5 色の色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか.



解答

底面に塗る色の選び方は 5 通り.

側面の塗り方は，残り 4 色の円順列となるので $(4-1)!$ 通り.

よって

$5 \times (4-1)! = 5 \times 6 = 30$ … 30 通り

171　次の問いに答えなさい.

(1)　大人 2 人と子供 4 人が手をつないで輪をつくるとき，大人 2 人が隣り合うような並び方は何通りあるか.

解答

大人 2 人を 1 組として，この 1 組と子供 4 人の円順列は，$(5-1)!$ 通り

各の並び方に対して，大人 2 人の並び方は，$2!$ 通り

よって，$(5-1)! \times 2! = 48$ … 48 通り

(2)　男子 4 人と女子 4 人が交互に並び，1 つの輪になる方法は何通りあるか.

解答

まず男子だけを並べると，並び方は，$(4-1)!$ 通り

4 カ所の男子の間に女子を順に並べると，並べ方は，$4!$ 通り

よって，$(4-1)! \times 4! = 144$ … 144 通り

172　5 種類の宝石を，ひもでつないで輪の形にするとき，何通りの輪が作れるか.

解答

円順列で考えると，$(5-1)!$ 通りの並べ方があり，輪の場合，ひっくり返すと同じになるものが 2 つずつあるので，

$\dfrac{(5-1)!}{2} = \dfrac{4!}{2} = 12$ … 12 通り

2 重複順列

173　次の問いに答えなさい.

(1)　4 つの異なるさいころを振るとき，目の出方は何通りあるか.

解答

各さいころの目の出方は 6 通りなので，

$6^4 = 1296$　…　1296 通り

(2)　5 人がじゃんけんをするとき，5 人の手の出し方は何通りあるか.

解答

1 人の手の出し方は 3 通りなので

$3^5 = 243$　…　243 通り

(3)　0 と 1 を 7 個並べて数字の列をつくるとき，全部で何個できるか.

解答

7 カ所に 2 通りの並べ方があるので，

$2^7 = 128$　…　128 通り

174　0，1，2，3，4 の 5 種類の数字で作られる 3 桁の整数は何個あるか.

解答

百の位には，0 を除く 4 通り

十の位と一の位には 5 通りの並べ方があるので，5^2 通り

よって，$4 \times 5^2 = 100$　…　100 通り

175　集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の部分集合はいくつあるか.

解答

それぞれの要素が含まれるか，含まれないか 2 通りあるので，

$2^6 = 64$　…　64 個

3 同じものを含む順列

176　8 個の数字 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 を使ってできる 8 桁の整数は何個あるか求めなさい.

解答

1 が 4 個，2 が 2 個，3 が 2 個あるので，

$\dfrac{8!}{4!\,2!\,2!} = 420$　…　420 個

177　**NAGANO** の 6 文字を 1 列に並べるとき，何通りの並べ方があるか.

解答

N が 2 文字，**A** が 2 文字あるので，

$\dfrac{6!}{2!\,2!} = 180$　…　180 通り

178　赤玉 3 個，白玉 2 個，青玉 2 個を 1 列に並べるとき，何通りの並べ方があるか．また，白玉 2 個が隣り合うような並べ方は何通りあるか.

解答

すべての並べ方は，

$\dfrac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$　…　210 通り

白玉 2 個を 1 組と考えると，

$\dfrac{6!}{3!\,2!} = 60$　…　60 通り

（白玉 2 個を入れ替えても，並び方は同じ）

179　5 個の数字 0, 1, 1, 2, 3 を並べてできる 5 桁の偶数はいくつあるか.

解答

一の位が 0 の場合と，2 の場合に分けて考える.

i)　一の位の数が 0 のとき

十の位から最高位までの 4 カ所に，2 個の 1 を含む 4 つの数字が並ぶので，$\dfrac{4!}{2!} = 12$　…　12 個

ii)　一の位の数が 2 のとき

最高位の数は 0 の除く 1 か 3

ア）　最高位が 1 のとき

残りの 1，3，0 を並べるので，$3! = 6$ 個

イ）　最高位が 3 のとき

残りの 1，1，0 を並べるので，$\dfrac{3!}{2!} = 3$ 個

よって，$6 + 3 = 9$　…　9 個

i)，ii) より，$12 + 9 = 21$　…　21 個

§３　組合せ

3.1　組合せ

180　次の値を求めなさい．

(1)　${}_6\mathrm{C}_3$

解答
与式 $= \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

(2)　${}_{10}\mathrm{C}_2$

解答
与式 $= \dfrac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$

(3)　${}_7\mathrm{C}_5$

解答
与式 $= \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21$
〔別解〕
与式 $= {}_7\mathrm{C}_2 = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$

(4)　${}_{10}\mathrm{C}_7$

解答
与式 $= {}_{10}\mathrm{C}_3$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

(5)　${}_n\mathrm{C}_1$

解答
与式 $= \dfrac{n}{1} = n$

(6)　${}_n\mathrm{C}_2$

解答
与式 $= \dfrac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$

$= \dfrac{n(n-1)}{2}$

(7)　${}_n\mathrm{C}_n$

解答
与式 $= {}_n\mathrm{C}_0 = 1$

(8)　${}_n\mathrm{C}_{n-1}$

解答
与式 $= {}_n\mathrm{C}_1 = n$

181　男子 6 人，女子 4 人の中から，4 人の委員を選ぶとき，次の問いに答えなさい．

(1)　全部で何通りの選び方があるか．

解答
${}_{10}\mathrm{C}_4 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$　…　210 通り

(2)　男子の委員 2 人，女子の委員 2 人を選ぶ方法は何通りあるか．

解答
男子 6 人の中から 2 人を選ぶ方法は，${}_6\mathrm{C}_2$ 通り
女子 4 人の中から 2 人を選ぶ方法は，${}_4\mathrm{C}_2$ 通り
よって，${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 90$　…　90 通り

(3)　少なくとも 1 人は女子を選ぶ方法は何通りあるか．

解答
女子を 1 人も選ばない方法を考える．
男子の中からだけ 4 人を選ぶ方法（女子が選ばれない方法）は，${}_6\mathrm{C}_4 = 15$ 通り
よって，$210 - 15 = 195$　…　195 通り

(4)　特定の 2 人 a，b がともに選ばれる方法は何通りあるか．

解答
a，b 以外の 8 人から，残りの 2 人を選べばよいので，
${}_8\mathrm{C}_2 = 28$　…　28 通り

(5)　a は選ばれるが，b は選ばれない方法は何通りあるか．

解答
a 以外の 9 人から，更に b を除き，その 8 人の中から，残りの 3 人を選べばよいので，
${}_8\mathrm{C}_3 = 56$　…　56 通り

182　次の問いに答えなさい．

(1)　円周上に異なる 6 個の点がある．これらの点を結んでできる線分は何本あるか．また，これらの点を頂点とする三角形はいくつできるか．

解答

線分

6 点の中から 2 点を選べば，1 本の線分が引けるので，

$_6C_2 = 15$　…　15 本

三角形

6 点の中から 3 点を選べば，1 つの三角形が書けるので，

$_6C_3 = 20$　…　20 個

(2)　平面上に 8 本の直線があり，どの 2 本も平行ではなく，どの 3 本も 1 点で交わらないとき，交点はいくつあるか．また，三角形はいくつできるか．

解答

交点

8 本の中から 2 本を選べば，交点が 1 つ決まるので，

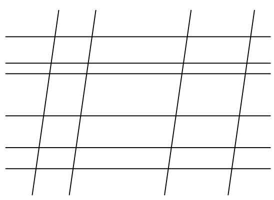
$_8C_2 = 28$　…　28 個

三角形

8 本の中から 3 本を選べば，1 つの三角形が決まるので，

$_8C_3 = 56$　…　56 個

(3)　6 本の平行線と，これらに交わる 4 本の平行線がある．平行四辺形は全部でいくつあるか．

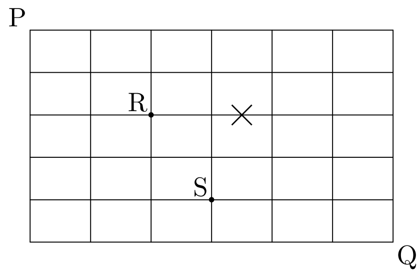


解答

6 本の平行線の中から 2 本を，4 本平行線の中から 2 本を選ぶと，1 つの平行四辺形が決まるので，

$_6C_2 \times {_4C_2} = 90$　…　90 個

183　図のような街路で P から Q に行く最短経路について，次の問いに答えなさい．



(1)　すべての経路は何通りあるか．

解答

$_{11}C_5 = 462$　…　462 通り

〔別解〕

$\dfrac{11!}{5!6!} = 462$　…　462 通り

(2)　R を通る経路は何通りあるか．

解答

P $\longrightarrow$ R　の最短経路は，$_4C_2$ 通り

R $\longrightarrow$ Q　の最短経路は，$_7C_3$ 通り

よって，$_4C_2 \times {_7C_3} = 210$　…　210 通り

(3)　R，S をともに通る経路は何通りあるか．

解答

P $\longrightarrow$ R　の最短経路は，$_4C_2$ 通り

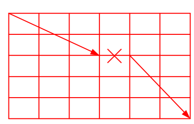
R $\longrightarrow$ S　の最短経路は，$_3C_1$ 通り

S $\longrightarrow$ Q　の最短経路は，$_4C_1$ 通り

よって，$_4C_2 \times {_3C_1} \times {_4C_1} = 72$　…　72 通り

(4)　×印の箇所を通らない経路は何通りあるか．

解答



×印を通る最短経路は，$_5C_2 \times {_5C_2} = 100$

よって，×印を通らない最短経路は，

$462 - 100 = 362$　…　362 通り

3.2 二項定理

184 次の式を展開しなさい．

(1)　$(a+1)^7$

解答

与式 $= {}_7\mathrm{C}_0\ a^7 + {}_7\mathrm{C}_1\ a^6\cdot 1^1 + {}_7\mathrm{C}_2\ a^5\cdot 1^2$
$+ {}_7\mathrm{C}_3\ a^4\cdot 1^3 + {}_7\mathrm{C}_4\ a^3\cdot 1^4 + {}_7\mathrm{C}_5\ a^2\cdot 1^5$
$+ {}_7\mathrm{C}_6\ a^1\cdot 1^6 + {}_7\mathrm{C}_7\ 1^7$
$= a^7 + 7a^6 + 21a^5 + 35a^4$
$+ 35a^3 + 21a^2 + 7a + 1$

(2)　$(a-2b)^4$

解答

与式 $= {}_4\mathrm{C}_0\ a^4 + {}_4\mathrm{C}_1\ a^3(-2b)^1 + {}_4\mathrm{C}_2\ a^2(-2b)^2$
$+ {}_4\mathrm{C}_3\ a^1(-2b)^3 + {}_4\mathrm{C}_4\ (-2b)^4$
$= a^4 - 8a^3b + 24a^2b^2 - 32ab^3 + 16b^4$

(3)　$(1-x)^6$

解答

与式 $= {}_6\mathrm{C}_0\ 1^6 + {}_6\mathrm{C}_1\ 1^5(-x) + {}_6\mathrm{C}_2\ 1^4(-x)^2$
$+ {}_6\mathrm{C}_3\ 1^3(-x)^3 + {}_6\mathrm{C}_4\ 1^2(-x)^4$
$+ {}_6\mathrm{C}_5\ 1\cdot(-x)^5 + {}_6\mathrm{C}_6\ (-x)^6$
$= 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3$
$+ 15x^4 - 6x^5 + x^6$

(4)　$\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^5$

解答

与式 $= {}_5\mathrm{C}_0\ (2x)^5 + {}_5\mathrm{C}_1\ (2x)^4\left(\dfrac{1}{x}\right)$
$+ {}_5\mathrm{C}_2\ (2x)^3\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + {}_5\mathrm{C}_3\ (2x)^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$
$+ {}_5\mathrm{C}_4\ (2x)\left(\dfrac{1}{x}\right)^4 + {}_5\mathrm{C}_5\ \left(\dfrac{1}{x}\right)^5$
$= 32x^5 + 80x^3 + 80x + \dfrac{40}{x} + \dfrac{10}{x^3} + \dfrac{1}{x^5}$

185 次の問いに答えなさい．

(1)　$(3x+1)^5$ の展開式における x^4 の係数を求めなさい．

解答

この展開式における一般項は，
${}_5\mathrm{C}_r\ (3x)^{5-r}\cdot 1^r = 3^{5-r}\ {}_5\mathrm{C}_r\ x^{5-r}$
ここで，$5-r=4$ とおけば，$r=1$
よって，x^4 の係数は
$3^4\times {}_5\mathrm{C}_1 = 405$

(2)　$(2x^3-3x)^5$ の展開式における x^9 の係数を求めなさい．

解答

この展開式における一般項は，
${}_5\mathrm{C}_r(2x^3)^{5-r}(-3x)^r = 2^{5-r}\cdot(-3)^r\ {}_5\mathrm{C}_r\ x^{15-2r}$
ここで，$15-2r=9$ とおけば，$r=3$
よって，x^9 の係数は
$2^2(-3)^3\times {}_5\mathrm{C}_3 = -1080$

(3)　$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7$ の展開式における x^2 の係数を求めなさい．

解答

この展開式における一般項は，
${}_7\mathrm{C}_r\ (x^2)^{7-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r = {}_7\mathrm{C}_r\ x^{14-3r}$
ここで，$14-3r=2$ とおけば，$r=4$
よって，x^2 の係数は
${}_7\mathrm{C}_4 = 35$

(4)　$\left(2x^3-\dfrac{1}{3x^2}\right)^5$ の展開式における定数項を求めなさい．

解答

この展開式における一般項は，
${}_5\mathrm{C}_r\ (2x^3)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{3x^2}\right)^r$
$= 2^{5-r}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^r {}_5\mathrm{C}_r\ x^{15-5r}$
ここで，$15-5r=0$ とおけば，$r=3$
よって，定数項は
$2^2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3\times {}_5\mathrm{C}_3 = -\dfrac{40}{27}$

基礎数学Ａの演習問題は，以上ですべて終了です．
一年間ご苦労様でした．